UNIWERSYTET PEDAGOGICZNY
im. KOMISJI EDUKACJI NARODOWEJ
w KRAKOWIE
Wydział Nauk Ścisłych i Przyrodniczych
Instytut Matematyki

Renata Malejki

Stabilność uogólnień równania Frécheta

ROZPRAWA DOKTORSKA

Promotor główny: prof. dr hab. Janusz Brzdęk
Promotor pomocniczy: dr Zbigniew Leśniak

KRAKÓW 2021

Składam serdeczne podziękowania Promotorowi głównemu rozprawy doktorskiej prof. dr hab. Januszowi Brzdękowi oraz Promotorowi pomocniczemu dr Zbigniewowi Leśniakowi za pomoc udzieloną w trakcie pisania tej pracy i cenne uwagi

Spis treści

Wprowadzenie

W niniejszej rozprawie badana jest stabilności w sensie Ulama dla równania funkcyjnego postaci

$$F(x_1 + \ldots + x_s) = \sum_{i=1}^{l} \Gamma_i(F(p_i(x_1, \ldots, x_r))) + D(x_1, \ldots, x_r) \tag{1}$$

w klasie funkcji $F : X \to Y$, gdzie funkcje $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_l : Y \to Y$, $D : X^r \to Y$ i $p_1, \ldots, p_l : X^r \to X$ są dane, $(X, +)$ jest grupą przemienną, $\mathbb{K}$ jest ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ lub zespolonych $\mathbb{C}$, Y jest przestrzenią Banacha nad $\mathbb{K}$ oraz l, r, s są ustalonymi dodatnimi liczbami całkowitymi, dla których zachodzi nierówność $s \leqslant r$.

Ogólne wyniki dotyczące stabilności równania (1), które są tu przedstawiane opierają się w znacznym stopniu na rezultatach opublikowanych w pracy [4]. Podamy też rezultaty bardziej szczegółowe, pochodzące głównie z prac [42, 43, 20, 21], a dotyczące stabilności i hiperstabilności pewnych szczególnych przypadków równania (1) postaci

$$A_1F(x+y+z)+A_2F(x)+A_3F(y)+A_4F(z) = A_5F(x+y)+A_6F(x+z)+A_7F(y+z), \tag{2}$$

gdzie $A_1, \ldots, A_7 \in \mathbb{K}$ są stałymi z ciała $\mathbb{K}$, a także pokażemy ich zastosowania w charakteryzacji przestrzeni unitarnych. Należy wspomnieć, że równanie (2) jest uogólnieniem bardzo znanego równania funkcyjnego Frécheta

$$F(x + y + z) + F(x) + F(y) + F(z) = F(x + y) + F(x + z) + F(y + z), \tag{3}$$

które zostało wprowadzone przez Frécheta w pracy [30] właśnie w związku z charakteryzacją przestrzeni unitarnych. Mianowicie M. Fréchet wykazał, że przestrzeń unormowana $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią unitarną wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $x, y, z \in X$ jest spełniony następujący warunek

$$\|x + y + z\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|z\|^2 = \|x + y\|^2 + \|x + z\|^2 + \|y + z\|^2. \tag{4}$$

Przyjmując $F(x) = \|x\|^2$ w równaniu (3) otrzymujemy właśnie warunek (4).

Ponieważ w przypadku, gdy $A_i = A_j \neq 0$ dla wszystkich $i, j \in \{1, \ldots, 7\}$, równanie (2) sprowadza się do równania (3), więc będziemy głównie rozważać sytuacje, gdy $A_i \neq A_j$ dla pewnych i, j. Wiadomo (zob. [5, 37]), że przy odpowiednich założeniach, każde rozwiązanie $F : X \to Y$ równania (3) jest postaci $F = a + q$, gdzie $a : X \to Y$ jest funkcją addytywną, a $q : X \to Y$ jest funkcją kwadratową. Wyniki dotyczące rozwiązań rozważanych równań umieszczone są w rozdziale IV.

Wśród znanych równań funkcyjnych występują szczególne przypadki równania (1). Są to np. addytywne równanie Cauchy'ego

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \tag{5}$$

równanie Jensena

$$f(x+y) = \frac{1}{2}\Big(f(2x) + f(2y)\Big),$$

równanie Jordana-von Neumanna (funkcji kwadratowej)

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y), \tag{6}$$

czy też równanie Drygasa

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + f(y) + f(-y).$$

Zauważmy ponadto, że równanie funkcyjne Frécheta może być zapisane w postaci (1) zarówno jako

$$f(x+y+z) = f(x+y) + f(x+z) + f(y+z) - f(x) - f(y) - f(z),$$

jak też

$$f(x+y) = f(x+z) + f(y+z) - f(x+y+z) - f(x) - f(y) - f(z).$$

Niech Δ oznacza operator różnicowy Frécheta definiowany dla funkcji $f : X \to Y$ wzorem

$$\Delta_y f(x) = \Delta_y^1 f(x) := f(x+y) - f(x), \qquad x, y \in X.$$

Ponadto (zob. np. [5]) przyjmujemy, że

$$\Delta_{t,z} := \Delta_t \circ \Delta_z, \qquad \Delta_t^2 := \Delta_{t,t}, \qquad t, z \in X,$$

$$\Delta_{t,u,z} := \Delta_t \circ \Delta_u \circ \Delta_z, \qquad \Delta_t^3 := \Delta_{t,t,t}, \qquad t, u, z \in X.$$

Zatem łatwo sprawdzić, że równanie (6) jest równoważne równaniu

$$\Delta_y^2 f(x) = 2f(y),$$

w tym sensie, że równania te mają te same rozwiązania w klasie funkcji $f : X \to Y$.

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}
\Delta_{x,y,z} f(t) &= (\Delta_x \circ \Delta_y \circ \Delta_z) f(t) \\
&= \Delta_x((\Delta_y \circ \Delta_z) f)(t) \\
&= (\Delta_y \circ \Delta_z) f(t+x) - (\Delta_y \circ \Delta_z) f(t) \\
&= \Delta_y(\Delta_z f)(t+x) - \Delta_y(\Delta_z f)(t) \\
&= \Delta_z f(t+x+y) - \Delta_z f(t+x) - \Delta_z f(t+y) + \Delta_z f(t) \\
&= f(t+x+y+z) - f(t+x+y) - f(t+x+z) + f(t+x) \\
&\quad - f(t+y+z) + f(t+y) + f(t+z) - f(t).
\end{aligned}$$

Zatem równanie (3) można zapisać w postaci

$$\Delta_{x,y,z} f(0) = -f(0).$$

Jeśli operator różnicowy Frécheta wyższych rzędów zdefiniujemy rekurencyjnie następująco:

$$\Delta_{x_{n+1},x_n,\dots,x_1} := \Delta_{x_{n+1}} \circ \Delta_{x_n,\dots,x_1}, \qquad x_1,\dots,x_{n+1} \in X,\ n \in \mathbb{N},$$

to równanie

$$\Delta_{x_n,\dots,x_1} f(x) = D(x_1,\dots,x_n,x), \qquad x, x_1,\dots,x_n \in X,$$

jest także szczególnym przypadkiem (1) dla $r = n$.

Warto wspomnieć jeszcze, że (3) może być zapisane jako

$$C^2 f(x,y,z) = 0,$$

gdzie

$$C^2 f(x,y,z) = Cf(x,y+z) - Cf(x,y) - Cf(x,z)$$

oraz

$$Cf(x,y) = f(x+y) - f(x) - f(y),$$

tzn. $C^2 f$ jest różnicą Cauchy'ego drugiego rzędu funkcji f. Wprowadzając definicję rekurencyjną

$$\begin{aligned} C^{n+1} f(x_1,\dots,x_{n+1},x_{n+2}) = {} & C^n f(x_1,\dots,x_{n+1}+x_{n+2}) \\ & - C^n f(x_1,\dots,x_n,x_{n+2}) - C^n f(x_1,\dots,x_{n+1}) \end{aligned}$$

otrzymujemy kolejny przykład równania (1) postaci

$$C^n f(x_1,\dots,x_n,x_{n+1}) = D(x_1,\dots,x_n,x_{n+1})$$

też dla $r = n$.

Następnym przykładem szczególnego przypadku równania (1) jest równanie funkcyjne

$$\begin{aligned} & f(x+y+z) + f(mx) + f(my) + f(mz) \\ & \qquad = \frac{N}{M}\left[f\left(\frac{m(x+y)}{n}\right) + f\left(\frac{m(x+z)}{n}\right) + f\left(\frac{m(y+z)}{n}\right)\right], \end{aligned}$$

gdzie M, N, m, n są dodatnimi liczbami całkowitymi, które jest równoważną formą (dla $f : X \to Y$) równania funkcyjnego

$$\begin{aligned} & M\left[f\left(\frac{x+y+z}{m}\right) + f(x) + f(y) + f(z)\right] \\ & \qquad = N\left[f\left(\frac{x+y}{n}\right) + f\left(\frac{x+z}{n}\right) + f\left(\frac{y+z}{n}\right)\right], \end{aligned} \tag{7}$$

rozważanego w [23] w dużo bardziej ogólnej sytuacji.

Każde rozwiązanie $f : X \to Y$ równania (7) jest postaci $f = a + q + c$, gdzie $a : X \to Y$ jest funkcją addytywną (czyli spełnia równanie Cauchy'ego (5)), $q : X \to Y$ jest funkcją kwadratową (czyli spełnia równanie Jordana-von Neumanna (6)) oraz $c \in Y$ (zob. [23]).

Równanie (7) ze stałymi $M = m = 3$ i $N = n = 2$ jest nazywane równaniem Popoviciu i było rozważane po raz pierwszy przez T. Popoviciu w pracy [46] w związku z pewnymi nierównościami dla funkcji wypukłych. Wyniki dotyczące rozwiązania tego równania i jego stabilności można znaleźć na przykład w [11, 55, 56]. Rozwiązania i stabilność (7) z $M = m = 3$ i $N = n = 2$ były rozważane przez Y.W. Lee [38]. W bardziej ogólnym przypadku, gdy $N = n^2$ i $M = m^2$ równanie (7) było rozważane w [39]. Stabilność równania (7) była badana też w pracy [57].

Na koniec wspomnijmy, że w artykułach [6, 7, 9, 58, 59] (przy założeniu, że X jest przestrzenią wektorową) rozpatrywana była stabilność równań funkcyjnych postaci

$$\sum_{i=1}^{m} A_i f\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) + A = 0, \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{m} h_i(f\left(g_i(x_1, \ldots, x_n)\right)) + A = 0, \tag{9}$$

gdzie $A_1, \ldots, A_m$ oraz a_{ij} (dla $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$) są skalarami, $g_1, \ldots, g_m : X^n \to X$ są odwzorowaniami liniowymi, a $h_1, \ldots, h_m$ są ciągłymi endomorfizmami przestrzeni Y.

Łatwo zauważyć, że równanie (9) (dla $h_1(y) \equiv y$ i $g_1(x_1, \ldots, x_n) \equiv x_1$) można zapisać w postaci (1) następująco

$$f(x_1) = \sum_{i=2}^{m} -h_i(f\left(g_i(x_1, \ldots, x_n)\right)) - A.$$

Podobnie, (8) staje się szczególnym przypadkiem równania (1), gdy $A_1 = 1$ i $a_{1j} = 1$ dla $j = 1, \ldots, n$.

Rozdział 1

Stabilność w sensie Ulama

Zagadnienie stabilności równań funkcyjnych pojawiło się w związku z następującym problemem postawionym przez S.M. Ulama w 1940 r. (zob. [33]) i dotyczącym przybliżonych homomorfizmów grup.

Niech G_1 będzie grupą, $(G_2; d)$ grupą metryczną oraz ε niech będzie pewną stałą dodatnią. Czy istnieje taka stała dodatnia δ, że dla każdego odwzorowania $f : G_1 \to G_2$, spełniającego warunek

$$\sup_{x,y\in G_1} d\Big(f(xy), f(x)f(y)\Big) \leqslant \varepsilon, \tag{1.1}$$

istnieje taki homomorfizm grup $h : G_1 \to G_2$, że

$$\sup_{x\in G_1} d\Big(f(x), h(x)\Big) \leqslant \delta \text{ ?} \tag{1.2}$$

Pierwszy wynik dający odpowiedź na to pytanie został opublikowany w 1941 r. przez D.H. Hyersa [32]. Udowodnił on, że jeśli funkcja f odwzorowująca przestrzeń Banacha X w przestrzeń Banacha Y spełnia nierówność

$$\sup_{x,y\in X} \|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leqslant \varepsilon,$$

dla pewnego $\varepsilon > 0$, to istnieje dokładnie jedno takie odwzorowanie addytywne $a : X \to Y$ (tzn. $a(x + y) = a(x) + a(y)$ dla $x, y \in X$), że

$$\sup_{x\in X} \|f(x) - a(x)\| \leqslant \varepsilon.$$

Dość długo uważano, że był to pierwszy wynik z teorii stabilności równań funkcyjnych. Jednakże obecnie znany jest już wcześniejszy wynik tego typu, dla funkcji odwzorowujących zbiór liczb naturalnych w zbiór liczb rzeczywistych, pochodzący z książki [54, str. 17].

Wykazaną przez D.H. Hyersa [32] własność równania Cauchy'ego

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \tag{1.3}$$

przyjęło się nazywać stabilnością Hyersa-Ulama; często wynik Hyersa opisuje się krótko mówiąc, że równanie (1.3) jest stabilne, dla uniknięcia nieporozumień dodając jeszcze czasem że ,,w sensie Hyersa-Ulama" i ewentualnie ,,w klasie funkcji Y^X".

Z czasem pojawiły się rozmaite uogólnienia i modyfikacje tego podejścia i jego rozszerzenia na wiele innych równań funkcyjnych. Jednym z pierwszych był wynik T. Aoki [2] (ponownie wykazany w [47]), który można sformułować następująco:

Niech $p \in [0,1)$ oraz $c \in \mathbb{R}$. Jeśli funkcja f odwzorowująca przestrzeń Banacha X w przestrzeń Banacha Y spełnia nierówność

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leqslant c(\|x\|^p + \|y\|^p), \qquad x, y \in X,$$

to istnieje dokładnie jedno takie odwzorowanie addytywne $a : X \to Y$, że

$$\|f(x) - a(x)\| \leqslant \frac{c}{1 - 2^{p-1}} \|x\|^p, \qquad x \in X. \tag{1.4}$$

Zauważmy, że biorąc $p = 0$ w wyniku T. Aoki otrzymujemy rezultat D.H. Hyersa.

Obecnie wiadomo już, że analogiczny wynik jest prawdziwy dla każdego $p \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, a sytuacja dla $p = 1$ jest istotnie inna. Ponadto oszacowanie (1.4) jest najlepsze możliwe w ogólnej sytuacji (zob. [36]).

Więcej informacji na ten temat oraz podobne wyniki dla innych równań funkcyjnych można znaleźć m.in. w pozycjach [22, 33, 36]. Niektóre z nowszych wyników, związanych z tematem tej rozprawy będziemy omawiali pod koniec tego rozdziału oraz w rozdziałach kolejnych. Z powodu obszerności literatury dotyczącej tego tematu, będziemy na ogół podawali odsyłacze tylko do prac najbardziej niezbędnych z punktu widzenia zagadnień tutaj omawianych; bardziej szczegółowe odniesienia można znaleźć we wspomnianych już monografiach [22, 33, 36].

W bardzo dużym uproszczeniu, mówimy, że równanie funkcyjne jest stabilne w sensie Ulama, jeżeli dla dowolnego rozwiązania przybliżonego (w pewnym określonym sensie) istnieje rozwiązanie dokładne tego równania, które jest ,,blisko'' wspomnianego rozwiązania przybliżonego. Przy czym pojęcie ,,blisko'' może być rozumiane w różny sposób, w zależności zarówno od rozpatrywanego równania jak i innych uwarunkowań.

Pojęcie stabilności w sensie Ulama można np. doprecyzować tak, jak to opisuje poniższa definicja ($\mathbb{R}_+$ oznacza zbiór nieujemnych liczb rzeczywistych).

Definicja 1.1
Niech (W, d_1) i (V, d_2) będą przestrzeniami metrycznymi, $S \neq \emptyset$ i $U \neq \emptyset$ będą zbiorami oraz klasy funkcji $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D} \subset W^U$ oraz $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}_+^S$ będą niepuste. Ponadto, niech będą dane operatory $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 : \mathcal{D} \to V^S$ oraz $\mathcal{S} : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_+^U$. Mówimy, że równanie

$$\mathcal{T}_1\psi = \mathcal{T}_2\psi \tag{1.5}$$

jest $(\mathcal{D}_0, \mathcal{S})$-stabilne w sensie Ulama, jeśli dla wszystkich funkcji $\psi \in \mathcal{D}_0$ oraz $\delta \in \mathcal{E}$ spełniających nierówność

$$d_2\Big((\mathcal{T}_1\psi)(s), (\mathcal{T}_2\psi)(s)\Big) \leqslant \delta(s), \qquad s \in S,$$

istnieje takie rozwiązanie $\phi \in \mathcal{D}$ równania (1.5), że

$$d_1\Big(\phi(t), \psi(t)\Big) \leqslant (\mathcal{S}\delta)(t), \qquad t \in U.$$

Zauważmy, że równanie (1.3) można zapisać w postaci (1.5) przyjmując np.

$$(\mathcal{T}_1\psi)(x,y) = \psi(x+y), \qquad (\mathcal{T}_2\psi)(x,y) = \psi(x) + \psi(y), \qquad (x,y) \in S, \psi \in \mathcal{D},$$

dla $S = X^2$, $U = X$, $V = W = Y$, $d_1(z,w) = \|z - w\|$ dla $z, w \in W$, $d_2 = d_1$ oraz $\mathcal{D} = Y^X$.

Z kolei wynik D.H. Hyersa można przy tych oznaczeniach opisać mówiąc, że równanie (1.3) jest $(\mathcal{D}_0, \mathcal{S})$-stabilne w sensie Ulama dla $\mathcal{D}_0 = Y^X$,

$$\mathcal{E} := \{\phi_c \in Y^{X^2} : c \in \mathbb{R}_+\}$$

oraz operatora $\mathcal{S}$ zdefiniowanego wzorem:

$$\mathcal{S}(\phi_c) = \Phi_c, \qquad \phi_c \in \mathcal{E},$$

gdzie $\phi_c(x,y) \equiv c$ oraz odwzorowanie $\Phi_c \in Y^X$ jest dane wzorem $\Phi_c(x) \equiv c$.

Wynik T. Aoki natomiast oznacza, że równanie (1.3) jest $(\mathcal{D}_0, \mathcal{S})$-stabilne w sensie Ulama dla $\mathcal{D}_0 = Y^X$, $\mathcal{E} := \{\phi_{c,p} \in Y^{X^2} : c \in \mathbb{R}_+, p \in [0,1)\}$ oraz operatora $\mathcal{S}$ zdefiniowanego wzorem:

$$\mathcal{S}(\phi_{c,p}) = \Phi_{c,p}, \qquad \phi_{c,p} \in \mathcal{E},$$

gdzie

$$\phi_{c,p}(x,y) \equiv c(\|x\|^p + \|y\|^p)$$

oraz odwzorowanie $\Phi_{c,p} \in Y^X$ jest dane wzorem

$$\Phi_{c,p}(x) \equiv \frac{c}{1 - 2^{p-1}}\|x\|^p.$$

Dodajmy jeszcze, że w przypadku, gdy operator $\mathcal{S}$ jest zerowy, tzn. $(\mathcal{S}\delta)(t) = 0$ dla wszystkich $\delta \in \mathcal{E}$ i $t \in S$, mówimy, że równanie (1.5) jest $(\mathcal{S}, \mathcal{D}_0)$-hiperstabilne w sensie Ulama. Więcej informacji na temat hiperstabilnści i podobnego pojęcia superstabilności można znaleźć w pracy przeglądowej [16].

1.1 Metoda punktu stałego

Do klasycznych metod badania stabilności równań funkcyjnych zalicza się klasyczną ,,metodę Hyersa'' polegającą na konstrukcji odpowiednich ciągów zbieżnych, metodę stałego punktu zainicjowaną przez J.A. Bakera [8] i rozwijaną później w pracach m.in. przez L. Cădariu i V. Radu (zob. [25, 18]), podobną do niej w pewnym sensie metodę Fortiego korzystającą z wyników dotyczących stabilności równań funkcyjnych jednej zmiennej, metodę średnich niezmienniczych zainicjowaną przez L. Szekelyhidiego oraz metodę korzystającą z tzw. ,,twierdzeń kanapkowych''. Więcej informacji na ten temat można znaleźć w monografiach [36, 33, 22] oraz w pracy przeglądowej [19].

Głównym narzędziem badawczym niniejszej rozprawy doktorskiej jest metoda punktu stałego, korzystająca z poniższego twierdzenia o punkcie stałych dla przestrzeni funkcyjnych pochodzącego z pracy [15] ($\mathbb{R}_+$ oznacza zbiór nieujemnych liczb rzeczywistych).

Twierdzenie 1.1
Niech spełnione będą trzy następujące warunki.

(H1) $S \neq \emptyset$ *jest zbiorem,* E *jest przestrzenią Banacha,* $t \in \mathbb{N}$*, funkcje* $f_1, ..., f_t : S \to S$, $L_1, \ldots, L_t : S \to \mathbb{R}_+$ *są dane.*

(H2) $\mathcal{T} : E^S \to E^S$ *jest operatorem spełniającym nierówność*

$$\left\|\mathcal{T}\xi(x) - \mathcal{T}\mu(x)\right\| \leqslant \sum_{i=1}^{t} L_i(x)\left\|\xi(f_i(x)) - \mu(f_i(x))\right\|, \qquad \xi, \mu \in E^S, x \in S.$$

(H3) $\Lambda : {\mathbb{R}_+}^S \to {\mathbb{R}_+}^S$ *definiujemy jako*

$$\Lambda\delta(x) := \sum_{i=1}^{t} L_i(x)\delta(f_i(x)), \qquad \delta \in {\mathbb{R}_+}^S, x \in S.$$

Jeśli funkcje $\varepsilon : S \to \mathbb{R}_+$ *oraz* $\varphi : S \to E$ *spełniają następujące dwa warunki:*

$$\left\|\mathcal{T}\varphi(x) - \varphi(x)\right\| \leqslant \varepsilon(x), \qquad x \in S, \tag{1.6}$$

$$\varepsilon^*(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \Lambda^n \varepsilon(x) < \infty, \qquad x \in S, \tag{1.7}$$

to istnieje taki jedyny punkt stały ψ *operatora* $\mathcal{T}$*, że*

$$\|\varphi(x) - \psi(x)\| \leqslant \varepsilon^*(x), \qquad x \in S.$$

Ponadto

$$\psi(x) := \lim_{n\to\infty} \mathcal{T}^n\varphi(x), \qquad x \in S.$$

Twierdzenie 1.1 będzie wykorzystane w dowodach głównych rezultatów tej pracy doktorskiej.

1.2 Znane wyniki innych autorów

Teraz przedstawimy niektóre znane twierdzenia, które dotyczą stabilności równań funkcyjnych najbardziej zbliżonych do tych rozpatrywanych w dalszych częściach tej pracy doktorskiej. W ich dowodzie było stosowane Twierdzenia 1.1. Symbole $\mathbb{N}$ oraz $\mathbb{Z}$ zawsze oznaczają odpowiednio zbiór dodatnich liczb całkowitych oraz zbiór liczb całkowitych.

W artykule [58] Dong Zhang rozważał stabilność równania funkcyjnego postaci

$$\sum_{i=1}^{m} A_i f\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right) = 0. \tag{1.8}$$

W tej publikacji Dong Zhang przyjmuje następujące założenia

(A) $\mathbb{F}, \mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, X jest przestrzenią unormowaną, Y jest przestrzenią Banacha, odpowiednio nad $\mathbb{F}, \mathbb{K}$.

(B) $n,m \in \mathbb{N}, n \geqslant 2, C \geqslant 0, a_{ij} \in \mathbb{F}, A_i \in \mathbb{K}$ dla $i \in \{1,...,m\}, j \in \{1,...,n\}$ są ustalone.

(C) Istnieją $i_0 \in \{1,...,m\}$ oraz $j_1, j_2 \in \{1,2,...,n\}$ takie, że $a_{i_0 j_1} \neq 0, a_{i_0 j_2} \neq 0$, oraz dla wszystkich $i \neq i_0, \gamma \neq 0$, istnieje $j \in \{1,...,n\}$ takie, że $a_{ij} \neq \gamma a_{i_0 j}$.

Pierwsze główne twierdzenie z pracy [58] dotyczące stabilności (a w zasadzie hiperstabilności) równania (1.8) jest następujące.

Twierdzenie 1.2
Przy założeniach $(A), (B), (C)$, *jeśli dla funkcji* $f\colon X \to Y$ *zachodzi warunek*

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} A_i f\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) \right\| \leqslant C \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^p \tag{1.9}$$

dla pewnego $p < 0$ *oraz dowolnych* $x_1, ..., x_n \in X \setminus \{0\}$, *to*

$$\sum_{i=1}^{m} A_i f\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) = 0, \qquad x_1, ..., x_n \in X \setminus \{0\}. \tag{1.10}$$

W drugim twierdzeniu z tej pracy zawarty jest analogiczny wynik, w którym nierówność (1.9) została zastąpiona przez warunek

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} A_i f\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) \right\| \leqslant C \prod_{j=1}^{n} \|x_j\|^{p_j} \tag{1.11}$$

dla pewnych $p_1, ..., p_n \in \mathbb{R}$, $p_1 + ... + p_n < 0$, oraz dowolnych $x_1, ..., x_n \in X \setminus \{0\}$.

Należy wspomnieć, że dowody tych twierdzeń zawierają lukę, która została uzupełniona w pracy [52].

Artykuł [59] zawiera analogiczne twierdzenie w którym funkcję kontrolną

$$C \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^p, \text{ gdzie } p < 0,$$

zastąpiono przez

$$C \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^{p_j}, \text{ gdzie } \sum_{j=1}^{n} p_j < 0.$$

W pracy [59] został też opisany pewien problem komputerowy, nazwany *The Hyers-Ulam Programming problem*, związany ze stabilnością równania (1.8).

W artykułach [6, 7] A. Bahyrycz i J. Olko przedstawiły kilka bardzo ogólnych wyników dotyczących stabilości równania funkcyjnego

$$\sum_{i=1}^{m} A_i f\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) + A = 0, \tag{1.12}$$

rozważanego w klasie funkcji $f\colon X \to Y$, gdzie $m, n \in \mathbb{N}$, X jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, Y przestrzenią Banacha nad $\mathbb{F}$, $A, a_{ij} \in \mathbb{F}$, oraz $A_i \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ dla $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$. Główny wynik z pracy [6] przedstawiamy w formie poniższego twierdzenia.

Twierdzenie 1.3
Załóżmy, że $A = 0$ *lub* $A\sum_{i=1}^{m} A_i \neq 0$. *Niech* $g\colon X \to Y$, $\theta\colon X^n \to [0,\infty)$ *spełniają warunek*

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} A_i g\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right) + A \right\| \leqslant \theta(x_1, ..., x_n), \qquad x_1, ..., x_n \in X. \tag{1.13}$$

Załóżmy, że istnieją $\emptyset \neq I \subset \{1, ..., m\}$, $c_1, ..., c_n \in \mathbb{F}$ *oraz* $\omega_1, ..., \omega_n \in [0,\infty)$ *takie, że*

(i) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j = 1,\ i \in I$,

(ii) $\sum_{i\notin I} |A_i|\omega_i < |\sum_{i\in I} A_i|$,

(iii) $\theta\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j(x_1, ..., x_n)\right) \leqslant \omega_i\theta(x_1, ..., x_n)$ *dla* $i \notin I$, $x_1, ..., x_n \in X$.

Wtedy istnieje jedyne rozwiązanie $G\colon X \to Y$ *równania* (8) *takie, że*

$$\|g(x) - G(x)\| \leqslant \frac{\theta(c_1x, ..., c_nx)}{|\sum_{i\in I} A_i| - \sum_{i\notin I} |A_i|\omega_i}, \qquad x \in X. \tag{1.14}$$

Ponadto G *jest jedynym rozwiązaniem równania* (8) *takim, że istnieje stała* $B \in (0,\infty)$, *dla której spełniona jest nierówność*

$$\|g(x) - G(x)\| \leqslant B\theta(c_1x, ..., c_nx), \qquad x \in X. \tag{1.15}$$

W pracy [7] przedstawione zostały analogiczne wyniki, ale dotyczące hiperstabilności równania (1.12).

Rozdział ten zakończymy twierdzeniem, które zostało udowodnione w artykule [5].

Twierdzenie 1.4
Niech $(X,+)$ *będzie grupą przemienną,* $\widehat{X} := X^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, $X_0 := X \setminus \{0\}$, Y *przestrzenią Banacha, funkcje* $f\colon X \to Y$, $c : \mathbb{Z} \to [0,\infty)$ *oraz* $L\colon X^3 \to [0,\infty)$ *spełniają następujące trzy warunki:*

$$\mathcal{M} := \{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : c(-2m) + 2c(m+1) + 2c(-m) + c(2m+1) < 1\} \neq \emptyset,$$

$$L(kx, ky, kz) \leqslant c(k)L(x, y, z), \qquad (x, y, z) \in \widehat{X}, m \in \mathcal{M}, \quad k \in \{-2m, m+1, -m, 2m+1\}, \tag{1.16}$$

$$\|f(x+y+z) + f(x) + f(y) + f(z) - f(x+y) - f(x+z) - f(y+z)\| \leqslant L(x, y, z), \qquad (x, y, z) \in \widehat{X}.$$

Wtedy istnieje jedyna funkcja $F : X \to Y$ *spełniająca*

$$f(x+y+z) + f(x) + f(y) + f(z) = f(x+y) + f(x+z) + f(y+z)$$

dla wszystkich $x, y, z \in X$ *taka, że*

$$\|f(x) - F(x)\| \leqslant \rho_L(x), \qquad x \in X_0,$$

gdzie

$$\rho_L(x) := \inf_{m\in\mathcal{M}} \frac{L((2m+1)x, -mx, -mx)}{1 - c(-2m) - 2c(m+1) - 2c(-m) - c(2m+1)}, \qquad x \in X_0.$$

Rozdział 2

Stabilność uogólnionego równania Frécheta

W bieżącym rozdziale prezentujemy rezultaty własne zawarte w publikacji [4] (uzyskane wspólnie ze współautorami tej pracy) i dotyczące stabilności w sensie Ulama równania funkcyjnego (1).

W rozdziale tym zakładamy, że $(X,+)$ jest grupą przemienną z elementem neutralnym oznaczanym przez 0, $\mathbb{K}$ jest ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ lub zespolonych $\mathbb{C}$ oraz Y jest przestrzenią Banacha nad $\mathbb{K}$. Niech $l, r, s \in \mathbb{N}$ będą takimi liczbami naturalnymi, że $s \leqslant r$ oraz niech funkcje $F : X \to Y$, $D : X^r \to Y$, $p_1, \ldots, p_l : X^r \to X$, $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_l : Y \to Y$ będą dane.

Niech $\mathcal{E}_X$ oznacza rodzinę wszystkich endomorfizmów X. Dla uproszczenia zapisu będziemy używać następującego oznaczenia:

$$\mu x := \mu(x), \qquad x \in X, \mu \in \mathcal{E}_X.$$

Dla $x \in X$ przyjmujemy, że $1\,x := x$, a następnie rekurencyjnie $(n+1)x := n\,x + x$ oraz $(n-1)x := n\,x - x$ dla $n \in \mathbb{Z}$. Ponadto, dla każdego $\mu \in \mathcal{E}_X$ oraz $k \in \mathbb{Z}$, definiujmy $\mu + 1, -\mu, k\mu \in \mathcal{E}_X$ jako

$$(\mu+1)x := \mu x + x, \qquad (-\mu)x := -\mu x, \qquad (k\mu)x := k(\mu x), \qquad x \in X.$$

Możemy teraz, dla $i = 1, \ldots, l$ i $\mu \in \mathcal{E}_X$, określić funkcje $\widehat{p_i}(\mu) : X \to X$ wzorem

$$\widehat{p_i}(\mu)x := p_i(((s-1)\mu + 1)x, -\mu x, \ldots, -\mu x), \qquad x \in X. \tag{2.1}$$

Poniżej przedstawimy główne twierdzenie tego rozdziału, które dotyczy stabilności równania funkcyjnego (1) z funkcją $D(x_1, \ldots, x_r) \equiv 0$, tzn. równania

$$F(x_1 + \ldots + x_s) = \sum_{i=1}^{l} \Gamma_i(F(p_i(x_1, \ldots, x_r))), \qquad x_1, \ldots, x_r \in X. \tag{2.2}$$

W dowodzie tego twierdzenia zostanie zastosowane Twierdzenie 1.1, za pomocą którego otrzymane zostanie rozwiązanie dokładne rozważanego równania, jako granica ciągu wartości iteracji odpowiednio zdefiniowanego operatora, na argumencie będącym przybliżonym rozwiązaniem równania (2.2).

Z kolei we Wniosku 2.1, następującym po Twierdzenie 2.1, przy pewnych dodatkowych założeniach uogólnimy ten wynik na przypadek równania (1) z niezerową funkcją D.

Twierdzenie 2.1
Niech $\mathcal{M} \subset \mathcal{E}_X$ będzie niepusty i

$$\mathcal{P} := \{\widehat{p}_i(\mu) : \mu \in \mathcal{M},\ i = 1, \dots, l\}. \tag{2.3}$$

Załóżmy, że $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}_X$, spełnione są dwa poniższe warunki

$$\kappa \circ \nu = \nu \circ \kappa, \qquad \nu \in \mathcal{P},\ \kappa \in \mathcal{M}, \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}\widehat{p}_j(\mu)p_i(x_1, \dots, x_r) = {} & p_i(\widehat{p}_j(\mu)x_1, \widehat{p}_j(\mu)x_2, \dots, \widehat{p}_j(\mu)x_r), \\ & x_1, \dots, x_r \in X,\ i, j = 1, \dots, l,\ \mu \in \mathcal{M},\end{aligned} \tag{2.5}$$

oraz istnieją takie liczby $A_1, \dots, A_l \in [0, \infty)$, że

$$\|\Gamma_i(z) - \Gamma_i(w)\| \leqslant A_i\|z - w\|, \qquad z, w \in Y,\ i = 1, \dots, l. \tag{2.6}$$

Jeśli funkcje $f\colon X \to Y$, $c : \mathcal{P} \to [0, \infty)$, $L\colon X^r \to [0, \infty)$ spełniają następujące dwie nierówności

$$\begin{aligned}\left\| f(x_1 + \ldots + x_s) - \sum_{i=1}^{l} \Gamma_i(f(p_i(x_1, \dots, x_r))) \right\| \leqslant {} & L(x_1, \dots, x_r), \\ & x_1, \dots, x_r \in X,\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$L(px_1, \dots, px_r) \leqslant c(p)L(x_1, \dots, x_r), \qquad x_1, \dots, x_r \in X,\ p \in \mathcal{P}, \tag{2.8}$$

oraz

$$\beta_\mu := \sum_{i=1}^{l} A_i c(\widehat{p}_i(\mu)) < 1, \qquad \mu \in \mathcal{M}, \tag{2.9}$$

to istnieje takie jedyne rozwiązanie $F : X \to Y$ równania (2.2), że

$$\|f(x) - F(x)\| \leqslant \rho_L(x) := \inf_{\mu \in \mathcal{M}} \frac{L_\mu(x)}{1 - \beta_\mu}, \qquad x \in X, \tag{2.10}$$

gdzie

$$L_\mu(x) := L(((s-1)\mu + 1)x, -\mu x, \dots, -\mu x), \qquad x \in X.$$

Ponadto

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} (\mathcal{T}_\mu)^n f(x), \qquad x \in X,\ \mu \in \mathcal{M},$$

gdzie operator $\mathcal{T}_\mu : Y^X \to Y^X$ jest dany wzorem

$$(\mathcal{T}_\mu\xi)(x) := \sum_{i=1}^{l} \Gamma_i(\xi(\widehat{p}_i(\mu)x)), \qquad \xi \in Y^X,\ x \in X,\ \mu \in \mathcal{M}. \tag{2.11}$$

Dowód. Niech operator $\mathcal{T}_\mu : Y^X \to Y^X$ będzie dany wzorem (2.11). W początkowej części dowodu pokażemy, że spełnia on założenia Twierdzenia 1.1.

W tym celu zauważmy, że wstawiając za x_1 wyrażenie $((s-1)\mu+1)x$ oraz biorąc

$$x_2 = \ldots = x_r = -\mu x$$

w nierówności (2.7) otrzymujemy

$$\left\| f(x) - \sum_{i=1}^{l} \Gamma_i(f(\widehat{p}_i(\mu)x)) \right\| \leqslant L(((s-1)\mu+1)x, -\mu x, \ldots, -\mu x) =: L_\mu(x) \qquad (2.12)$$

dla $x \in X$, $\mu \in \mathcal{M}$. Nierówność (2.12) może być więc zapisana w postaci

$$\|\mathcal{T}_\mu f(x) - f(x)\| \leqslant L_\mu(x), \qquad x \in X,\ \mu \in \mathcal{M}.$$

Zdefiniujmy $\Lambda_\mu : {\mathbb{R}_+}^X \to {\mathbb{R}_+}^X$ jako

$$\Lambda_\mu \eta(x) := \sum_{i=1}^{l} A_i \eta(\widehat{p}_i(\mu)x), \qquad \eta \in {\mathbb{R}_+}^X,\ x \in X,\ \mu \in \mathcal{M}.$$

Wtedy dla każdego $\mu \in \mathcal{M}$ operator $\Lambda := \Lambda_\mu$ ma postać opisaną w warunku (H3) z Twierdzenia 1.1 (dla $S = X$ i $E = Y$) oraz

$$f_i = \widehat{p}_i(\mu), \qquad L_i(x) \equiv A_i, \qquad i = 1, \ldots, l.$$

Ponadto, z warunku (2.6) wynika, że dla wszystkich $\xi, \eta \in Y^X$, $x \in X$, $\mu \in \mathcal{M}$ zachodzi

$$\begin{aligned}\|\mathcal{T}_\mu \xi(x) - \mathcal{T}_\mu \eta(x)\| &= \left\| \sum_{i=1}^{l} \Gamma_i(\xi(\widehat{p}_i(\mu)x)) - \sum_{i=1}^{l} \Gamma_i(\eta(\widehat{p}_i(\mu)x)) \right\| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{l} A_i \|(\xi - \eta)(\widehat{p}_i(\mu)x)\|,\end{aligned}$$

gdzie

$$(\xi - \eta)(y) := \xi(y) - \eta(y), \qquad y \in X.$$

Oznacza to, że $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\mu$ spełnia nierówność występującą w (H2) dla każdego $\mu \in \mathcal{M}$.

Natomiast z założenia (2.4) dla wszystkich $\kappa, \mu \in \mathcal{M}$, $i = 1, \ldots, l$

$$\Big((s-1)\kappa + 1\Big) \circ \widehat{p}_i(\mu) = \widehat{p}_i(\mu) \circ \Big((s-1)\kappa + 1\Big),$$

zatem

$$\begin{aligned}L_\kappa(\widehat{p}_i(\mu)x) &= L\Big(((s-1)\kappa+1)\widehat{p}_i(\mu)x, -\kappa\widehat{p}_i(\mu)x, \ldots, -\kappa\widehat{p}_i(\mu)x\Big) \\ &= L\Big(\widehat{p}_i(\mu)((s-1)\kappa+1)x, \widehat{p}_i(\mu)(-\kappa x), \ldots, \widehat{p}_i(\mu)(-\kappa x)\Big), \qquad x \in X.\end{aligned}$$

A w konsekwencji z (2.8) otrzymujemy

$$L_\kappa(\widehat{p}_i(\mu)x) \leqslant c(\widehat{p}_i(\mu)) L_\kappa(x), \qquad x \in X, \kappa, \mu \in \mathcal{M}, i = 1, \ldots, l.$$

Zatem, na mocy powyższej nierówności,

$$\begin{aligned}\Lambda_\mu L_\kappa(x) &= \sum_{i=1}^{l} A_i L_\kappa(\widehat{p}_i(\mu)x) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{l} A_i c(\widehat{p}_i(\mu)) L_\kappa(x) = \beta_\mu L_\kappa(x)\end{aligned} \tag{2.13}$$

dla $\kappa, \mu \in \mathcal{M}$, $x \in X$. Następnie indukcyjnie pokażemy, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ mamy nierówność

$$\Lambda_\mu{}^n L_\kappa(x) \leqslant \left(\beta_\mu\right)^n L_\kappa(x), \qquad x \in X, \mu, \kappa \in \mathcal{M}. \tag{2.14}$$

Zauważmy, że warunek (2.14) dla $n = 1$ ma postać (2.13). Ustalmy $k \in \mathbb{N}$ i załóżmy, że (2.14) zachodzi dla $n = k$.

Korzystając z postaci operatora Λ_μ, (2.13) i założenia indukcyjnego otrzymujemy

$$\begin{aligned}\Lambda_\mu^{k+1} L_\kappa(x) &= \sum_{i=1}^{l} A_i \Lambda_\mu^k L_\kappa(\widehat{p}_i(\mu)x) \leqslant \left(\beta_\mu\right)^k \sum_{i=1}^{l} A_i L_\kappa(\widehat{p}_i(\mu)x) \\ &\leqslant \left(\beta_\mu\right)^k \beta_\mu L_\kappa(x) = \left(\beta_\mu\right)^{k+1} L_\kappa(x), \qquad x \in X, \mu, \kappa \in \mathcal{M}.\end{aligned}$$

Pokazaliśmy więc, że (2.14) zachodzi dla $n = k + 1$, co kończy dowód warunku (2.14).

Stąd z (2.9) mamy następujące oszacowanie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Lambda_\mu{}^n L_\mu(x) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \left(\beta_\mu\right)^n L_\mu(x) = \frac{L_\mu(x)}{1 - \beta_\mu}, \qquad \mu \in \mathcal{M}, x \in X.$$

Zatem z Twierdzenia 1.1 (z $S = X$ i $E = Y$) wynika, że dla każdego $\mu \in \mathcal{M}$ istnieje taka funkcja $F_\mu \colon X \to Y$, że

$$\|f(x) - F_\mu(x)\| \leqslant \frac{L_\mu(x)}{1 - \beta_\mu}, \qquad x \in X, \tag{2.15}$$

oraz $F_\mu = \mathcal{T}_\mu F_\mu$, tzn.

$$F_\mu(x) = \sum_{i=1}^{l} \Gamma_i(F_\mu(\widehat{p}_i(\mu)x)), \qquad x \in X.$$

Ponadto

$$F_\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{T}_\mu{}^n f(x), \qquad x \in X, \mu \in \mathcal{M}.$$

Następnie przez indukcję pokażemy, że

$$\begin{aligned}\left\| \mathcal{T}_\mu{}^n f(x_1 + \ldots + x_s) - \sum_{i=1}^{l} \Gamma_i(\mathcal{T}_\mu{}^n f(p_i(x_1, \ldots, x_r))) \right\| \\ \leqslant \left(\beta_\mu\right)^n L(x_1, \ldots, x_r)\end{aligned} \tag{2.16}$$

dla wszystkich $x_1, \ldots, x_r \in X$, $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mu \in \mathcal{M}$.

Ustalmy w tym celu $\mu \in \mathcal{M}$. Dla $n = 0$ warunek (2.16) jest równoznaczny z (2.7). Weźmy $k \in \mathbb{N}_0$ oraz załóżmy, że (2.16) zachodzi dla $n = k$ oraz dla wszystkich $x_1, \ldots, x_r \in X$. Wtedy z (2.5) i (2.6) mamy

$$\begin{aligned}
&\Big\| \mathcal{T}_\mu^{k+1} f(x_1 + \ldots + x_s) - \sum_{i=1}^{l} \Gamma_i(\mathcal{T}_\mu{}^{k+1} f(p_i(x_1, \ldots, x_r))) \Big\| \\
&\qquad = \Big\| \sum_{j=1}^{l} \Gamma_j(\mathcal{T}_\mu{}^k f(\widehat{p}_j(\mu)(x_1 + \ldots + x_s))) \\
&\qquad\quad - \sum_{i=1}^{l} \Gamma_i\Big(\sum_{j=1}^{l} \Gamma_j(\mathcal{T}_\mu{}^k f(\widehat{p}_j(\mu) p_i(x_1, \ldots, x_r)))\Big) \Big\| \\
&\qquad = \Big\| \sum_{j=1}^{l} \Gamma_j(\mathcal{T}_\mu{}^k f(\widehat{p}_j(\mu) x_1 + \ldots + \widehat{p}_j(\mu) x_s)) \\
&\qquad\quad - \sum_{i=1}^{l} \Gamma_i\Big(\sum_{j=1}^{l} \Gamma_j(\mathcal{T}_\mu{}^k f(p_i(\widehat{p_j}(\mu) x_1, \ldots, \widehat{p_j}(\mu) x_r)))\Big) \Big\| \\
&\qquad \leqslant \sum_{j=1}^{l} A_j \Big\| \mathcal{T}_\mu{}^k f(\widehat{p}_j(\mu) x_1 + \ldots + \widehat{p}_j(\mu) x_s)) \\
&\qquad\quad - \sum_{i=1}^{l} \Gamma_i(\mathcal{T}_\mu{}^k f(p_i(\widehat{p}_j(\mu) x_1, \ldots, \widehat{p}_j(\mu) x_r)) \Big\| \\
&\qquad \leqslant \sum_{j=1}^{l} A_j \Big(\beta_\mu\Big)^k L(\widehat{p}_j(\mu) x_1, \ldots, \widehat{p}_j(\mu) x_r) \\
&\qquad \leqslant \Big(\beta_\mu\Big)^{k+1} L(x_1, \ldots, x_r)
\end{aligned}$$

dla wszystkich $x_1, \ldots, x_r \in X$, co kończy dowód (2.16). Ponieważ β_μ spełnia warunek (2.9), więc biorąc $n \to \infty$ w (2.16) wnioskujemy, że

$$F_\mu(x_1 + \ldots + x_s) = \sum_{i=1}^{l} \Gamma_i(F_\mu(p_i(x_1, \ldots, x_r))), \qquad x_1, \ldots, x_r \in X. \tag{2.17}$$

Udowodniliśmy w ten sposób, że dla każdego $\mu \in \mathcal{M}$ istnieje funkcja $F_\mu : X \to Y$ spełniająca równanie (2.2) oraz warunek (2.15).

Następnie pokażemy, że $F_\mu = F_\kappa$ dla wszystkich $\mu, \kappa \in \mathcal{M}$. W tym celu wykażemy wcześniej, że

$$\|\mathcal{T}_\mu{}^n \xi(x) - \mathcal{T}_\mu{}^n \eta(x)\| \leqslant \Lambda_\mu{}^n \delta(x), \qquad x \in X, \tag{2.18}$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\xi, \eta \in Y^X$, $\mu \in \mathcal{M}$ i $\delta \in \mathbb{R}_+{}^X$ spełniających warunek $\|\xi(x) - \eta(x)\| \leqslant \delta(x)$ dla $x \in X$.

Zauważmy, że przypadek $n = 0$ w (2.18) oznacza nierówność $\|\xi(x) - \eta(x)\| \leqslant \delta(x)$ dla $x \in X$, $\xi, \eta \in Y^X$, $\mu \in \mathcal{M}$ i $\delta \in \mathbb{R}_+{}^X$, $\|\xi(x) - \eta(x)\| \leqslant \delta(x)$ dla $x \in X$. Następnie załóżmy, że (2.18) zachodzi dla ustalonego $n \in \mathbb{N}_0$ oraz dla wszystkich $\xi, \eta \in Y^X$, $\mu \in \mathcal{M}$ i $\delta \in \mathbb{R}_+{}^X$ spełniających warunek $\|\xi(x) - \eta(x)\| \leqslant \delta(x)$ dla $x \in X$. Wtedy, dla

$\xi, \eta \in Y^X$, $\mu \in \mathcal{M}$ i $\delta \in {\mathbb{R}_+}^X$, $\|\xi(x) - \eta(x)\| \leqslant \delta(x)$ dla $x \in X$, mamy

$$\begin{aligned} \|{\mathcal{T}_\mu}^{n+1}\xi(x) - {\mathcal{T}_\mu}^{n+1}\eta(x)\| &\leqslant \sum_{i=1}^{l} L_i(x)\|{\mathcal{T}_\mu}^n\xi(\widehat{p}_i(\mu)x) - {\mathcal{T}_\mu}^n\eta(\widehat{p}_i(\mu)x)\| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{l} L_i(x){\Lambda_\mu}^n\delta(\widehat{p}_i(\mu)x) = {\Lambda_\mu}^{n+1}\delta(x), \qquad x \in X. \end{aligned}$$

To kończy dowód (2.18).

Ustalmy $\mu, \kappa \in \mathcal{M}$. Zauważmy, że F_κ spełnia (2.17) z μ zastąpionym przez κ, tzn.

$$F_\kappa(x_1 + \ldots + x_s) = \sum_{i=1}^{l} \Gamma_i(F_\kappa(p_i(x_1, \ldots, x_r))), \qquad x_1, \ldots, x_r \in X. \tag{2.19}$$

Zatem biorąc

$$x_1 = ((s-1)\mu + 1)x, \qquad x_2 = \ldots = x_r = -\mu x$$

w (2.17) oraz (2.19) (dla $x \in X$) dostajemy, że $\mathcal{T}_\mu F_\iota = F_\iota$ dla $\iota = \mu, \kappa$. Z nierówności (2.14), (2.15) i (2.18) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \|F_\mu(x) - F_\kappa(x)\| &= \|{\mathcal{T}_\mu}^n F_\mu(x) - {\mathcal{T}_\mu}^n F_\kappa(x)\| \\ &\leqslant \|{\mathcal{T}_\mu}^n F_\mu(x) - {\mathcal{T}_\mu}^n f(x)\| + \|{\mathcal{T}_\mu}^n f(x) - {\mathcal{T}_\mu}^n F_\kappa(x)\| \\ &\leqslant \frac{{\Lambda_\mu}^n L_\mu(x)}{1-\beta_\mu} + \frac{{\Lambda_\mu}^n L_\kappa(x)}{1-\beta_\kappa} \\ &\leqslant \frac{\big(\beta_\mu\big)^n L_\mu(x)}{1-\beta_\mu} + \frac{\big(\beta_\kappa\big)^n L_\kappa(x)}{1-\beta_\kappa} \end{aligned}$$

dla każdego $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$. Biorąc $n \to \infty$ dostajemy $F_\mu = F_\kappa =: F$. W ten sposób, na mocy (2.15) dowiedliśmy, że

$$\|f(x) - F(x)\| \leqslant \frac{L_\mu(x)}{1-\beta_\mu}, \qquad x \in X, \mu \in \mathcal{M},$$

a stąd wynika oszacowanie (2.10).

Następnie pokażemy, że F jest jedynym rozwiązaniem równania (2.2). Niech $G : X \to Y$ będzie również rozwiązaniem równania (2.2) takim, że $\|f(x) - G(x)\| \leqslant \rho_L(x)$ dla $x \in X$. Wtedy

$$\|G(x) - F(x)\| \leqslant 2\rho_L(x), \qquad x \in X.$$

Ponadto $\mathcal{T}_\mu G = G$ dla każdego $\mu \in \mathcal{M}$. Stąd dla ustalonego $\mu \in \mathcal{M}$ z (2.14) i (2.18) dostajemy

$$\begin{aligned} \|G(x) - F(x)\| &= \|{\mathcal{T}_\mu}^n G(x) - {\mathcal{T}_\mu}^n F(x)\| \\ &\leqslant 2{\Lambda_\mu}^n \rho_L(x) \leqslant \frac{2{\Lambda_\mu}^n L_\mu(x)}{1-\beta_\mu} \leqslant \frac{2\big(\beta_\mu\big)^n L_\mu(x)}{1-\beta_\mu} \end{aligned}$$

dla $x \in X$ i $n \in \mathbb{N}$. W konsekwencji biorąc $n \to \infty$ otrzymujemy, że $G = F$. To kończy dowód. ∎

Z Twierdzenia 2.1 uzyskujemy analogiczny wynik w przypadku, gdy D nie jest funkcją zerową, ale przy pewnych dodatkowych założeniach. Rezultat ten przedstawiamy poniżej.

Wniosek 2.1
Niech $\mathcal{M} \subset \mathcal{E}_X$ oraz $\mathcal{P}$ będzie określone za pomocą (2.3). *Załóżmy, że $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}_X$ oraz warunki* (2.4), (2.5) *i* (2.6) *są spełnione. Niech funkcje $f_1 \colon X \to Y$, $c : \mathcal{P} \to [0, \infty)$ oraz $L \colon X^r \to [0, \infty)$ spełniają warunki* (2.8), (2.9) *oraz zachodzi nierówność*

$$\left\| f_1(x_1 + \ldots + x_s) - \sum_{i=1}^{l} \Gamma_i(f_1(p_i(x_1, \ldots, x_r))) - D(x_1, \ldots, x_r) \right\| \leqslant L(x_1, \ldots, x_r), \qquad x_1, \ldots, x_r \in X.$$

Załóżmy, że $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_l$ są funkcjami addytywnymi oraz równanie (1) *ma co najmniej jedno rozwiązanie $F_0 : X \to Y$. Wtedy istnieje jedyne rozwiązanie $F_1 : X \to Y$ równania* (1) *takie, że*

$$\|f_1(x) - F_1(x)\| \leqslant \inf_{\mu \in \mathcal{M}} \frac{L_\mu(x)}{1 - \beta_\mu}, \qquad x \in X. \tag{2.20}$$

Dowód. Zapiszmy $f := f_1 - F_0$. Wtedy zachodzi warunek (2.7), a więc na podstawie Twierdzenia 2.1 istnieje jedyne rozwiązanie $F : X \to Y$ równania (2.2) takie, że zachodzi oszacowanie (2.10). Niech $F_1 := F + F_0$. Wtedy F_1 tak zdefiniowane jest rozwiązaniem równania (1), które spełnia warunek (2.20). Ponadto, F_1 jest jedynym rozwiązaniem (1) spełniającym (2.20), ponieważ F jest jedynym rozwiązaniem równania (2.2) spełniającym (2.10). ∎

Z Twierdzenia 2.1 otrzymujemy bezpośrednio także następujący wniosek dotyczący hiperstabilności równania funkcyjnego (2.2).

Wniosek 2.2
Niech $\mathcal{M} \subset \mathcal{E}_X$ oraz $\mathcal{P}$ będzie określone za pomocą (2.3). *Załóżmy, że $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}_X$ oraz warunki* (2.4), (2.5) *i* (2.6) *są spełnione. Niech funkcje $f \colon X \to Y$, $c : \mathcal{P} \to [0, \infty)$ oraz $L \colon X^r \to [0, \infty)$ spełniają warunki* (2.7) *i* (2.8) *oraz*

$$\sup_{\mu \in \mathcal{M}} \beta_\mu < 1, \qquad \inf_{\mu \in \mathcal{M}} L(((s-1)\mu + 1)x, -\mu x, \ldots, -\mu x) = 0, \qquad x \in X. \tag{2.21}$$

Wtedy f jest rozwiązaniem równania (2.2).

Poniższa uwaga przedstawia przykłady takich funkcji kontrolnych L, że warunek (2.8) jest spełniony z odpowiednimi stałymi $c(p_i)$ oraz zbiorem $\mathcal{P}$ (zależnymi od zbioru $\mathcal{M}$ oraz funkcji $p_1, \ldots, p_l$).

Uwaga 2.1
Niech $\mathbb{Q}$ oznacza zbiór liczb wymiernych i X będzie rzeczywistą przestrzenią unormowaną. Załóżmy, że $p_1, \ldots, p_l$ oraz $\mathcal{M}$ są takie, że dla zbioru $\mathcal{P}$ określonego za pomocą (2.3) zachodzi warunek

$$\mathcal{P} \subset \{\mu_m \in \mathcal{E}_X : m \in \mathbb{Q}\},$$

gdzie $\mu_m(x) = mx$ dla $x \in X$, $m \in \mathbb{Q}$.

(a) Jeśli $L(0, \ldots, 0) = 0$ oraz

$$L(x_1, \ldots, x_r) = \epsilon\Big(\lambda_1 \|d_1 x_1\|^{q_1} + \ldots + \lambda_r \|d_r x_r\|^{q_r}\Big)^w, \qquad (x_1, \ldots, x_r) \in X^r \setminus \{(0, \ldots, 0)\},$$

gdzie $r \in \mathbb{N}$, $w \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\epsilon, q_i, \lambda_i \in (0, \infty)$ dla $i = 1, \ldots, r$ oraz $d_1, \ldots, d_r \in \mathcal{E}_X$ (jeśli $w < 0$, to zakładamy dodatkowo, że funkcje $d_1, \ldots, d_r$ są injekcjami), to warunek (2.8) zachodzi na przykład z funkcją $c : \mathcal{P} \to [0, \infty)$ postaci

$$c(\mu_m) = \max_{i=1,\ldots,r} |m|^{q_i w}, \qquad m \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}. \tag{2.22}$$

Ponadto w przypadku, gdy $w < 0$ oraz

$$\mathcal{M} := \{\mu_m \in \mathcal{E}_X : m \in (K, \infty) \cap \mathbb{Q}\}, \tag{2.23}$$

gdzie $K > 0$ jest tak dużą liczbą, że $\sup_{\mu \in \mathcal{M}} \beta_\mu < 1$, dostajemy warunek (2.21) (który implikuje hiperstabilność równania). Natomiast, w przypadku, gdy $w > 0$ oraz

$$\mathcal{M} := \{\mu_m \in \mathcal{E}_X : m \in (0, K) \cap \mathbb{Q}\}, \tag{2.24}$$

gdzie $K > 0$ jest tak małą liczbą, że zachodzi warunek (2.9), otrzymujemy

$$L_{\mu_m}(x) = \epsilon\,(\lambda_1((s-1)m+1)^{q_1}\|d_1 x\|^{q_1} + \lambda_2 m^{q_2}\|d_2 x\|^{q_2} + \ldots + \lambda_r m^{q_r}\|d_r x\|^{q_r})^w$$

dla wszystkich $x \in X$ i $\mu_m \in \mathcal{M}$, a w konsekwencji

$$\rho_L(x) := \inf_{\mu \in \mathcal{M}} \frac{L_\mu(x)}{1 - \beta_\mu} = \epsilon(\lambda_1 \|d_1 x\|^{q_1})^w, \qquad x \in X.$$

(b) Niech $\chi \in \{1, -1\}$ oraz $\omega(t) = t^\chi$ dla $t \neq 0$ oraz $\omega(0) = 0$. Jeśli funkcja kontrolna $L\colon X^r \to [0, \infty)$ jest postaci

$$L(x_1, \ldots, x_r) = \omega(\|d_1 x_1\|^{q_1} \cdot \ldots \cdot \|d_r x_r\|^{q_r}), \qquad x_1, \ldots, x_r \in X,$$

gdzie $d_1, \ldots, d_r \in \mathcal{E}_X$ oraz $q_1, \ldots, q_r \in [0, \infty)$, $q_1 + \ldots + q_r > 0$, to warunek (2.8) zachodzi z funkcją $c : \mathcal{P} \to [0, \infty)$ postaci

$$c(\mu_m) = |m|^{(q_1 + \ldots + q_r)\chi}, \qquad m \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}. \tag{2.25}$$

Ponadto, jeśli $\chi = -1$ oraz zbiór $\mathcal{M}$ jest postaci (2.23), gdzie $K > 0$ jest dostatecznie dużą liczbą, to otrzymujemy warunek (2.21). Natomiast, jeśli $\chi = 1$ oraz zbiór $\mathcal{M}$ jest postaci (2.24), gdzie $K > 0$ jest tak małą liczbą, że zachodzi warunek (2.9), to

$$L_{\mu_m}(x) = ((s-1)m+1)^{q_1} m^{q_2 + \ldots + q_r} \|d_1 x\|^{q_1} \|d_2 x\|^{q_2} \cdot \ldots \cdot \|d_r x\|^{q_r}, \qquad x \in X,$$

i wobec tego $\rho_L(x) \equiv 0$.

Prosty przykład takiej sytuacji przedstawiony zostanie we Wniosku 2.3.

Ponadto zauważymy, że równanie (1) ma co najmniej jedno rozwiązanie $F_0 : X \to Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$D(x_1, \ldots, x_r) = g(x_1 + \ldots + x_s) - \sum_{i=1}^{l} \Gamma_i(g(p_i(x_1, \ldots, x_r))), \qquad x_1, \ldots, x_r \in X,$$

dla pewnej funkcji $g : X \to Y$. To oznacza, że klasa funkcji $D : X^r \to Y$ takich, że równanie (1) ma co najmniej jedno rozwiązanie $F_0 : X \to Y$ jest bardzo duża (zob. [14, Uwaga 2.3]).

Zauważmy też, że jeśli $l = 6$, $s = r = 3$, $\Gamma_i(y) = a_i y$ dla $y \in Y$ oraz pewnych $a_i \in \mathbb{K}$, gdzie $i = 1, \ldots, 6$, oraz funkcje $p_1, \ldots, p_6 : X^3 \to X$ są postaci:

$$\begin{aligned} &p_1(x, y, z) = x, && p_2(x, y, z) = y, && p_3(x, y, z) = z, \\ &p_4(x, y, z) = x + y, && p_5(x, y, z) = x + z, && p_6(x, y, z) = y + z, \quad x, y, z \in X, \end{aligned}$$

to równanie (1) przybiera postać

$$\begin{aligned} f(x + y + z) = \ & a_1 f(x) + a_2 f(y) + a_3 f(z) + a_4 f(x + y) \\ & + a_5 f(x + z) + a_6 f(y + z) + D(x, y, z). \end{aligned} \tag{2.26}$$

Równanie to jest więc pewnym uogólnieniem równania (3). Stąd z Wniosku 2.1 wyprowadzamy następujący rezultat.

Wniosek 2.3
Załóżmy, że $a_1, \ldots, a_6 \in \mathbb{K}$ oraz równanie (2.26) ma co najmniej jedno rozwiązanie $F_0 : X \to Y$. Niech $f : X \to Y$, $c' : \mathbb{Z} \to [0, \infty)$, $L : X^3 \to [0, \infty)$ oraz spełnione są trzy następujące warunki:

$$\begin{aligned} \mathbb{M} := \{m \in \mathbb{Z}_0 : \ & |a_6| c'(-2m) + (|a_4| + |a_5|) c'(m + 1) \\ & + (|a_2| + |a_3|) c'(-m) + |a_1| c'(2m + 1) < 1\} \neq \emptyset, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \| f(x + y + z) \ & - a_1 f(x) - a_2 f(y) + a_3 f(z) - a_4 f(x + y) - a_5 f(x + z) \\ & - a_6 f(y + z) - D(x, y, z) \| \leqslant L(x, y, z), \qquad x, y, z \in X, \end{aligned} \tag{2.27}$$

$$L(mx, my, mz) \leqslant c'(m) L(x, y, z), \qquad x, y, z \in X,\ m \in \mathbb{Z}. \tag{2.28}$$

Wtedy istnieje jedyne rozwiązanie $F : X \to Y$ równania (2.26) takie, że

$$\| f(x) - F(x) \| \leqslant \inf_{m \in \mathbb{M}} \frac{L((2m + 1)x, -mx, -mx)}{1 - \beta_m}, \tag{2.29}$$

gdzie

$$\beta_m := |a_6| c'(-2m) + (|a_4| + |a_5|) c'(m + 1) + (|a_2| + |a_3|) c'(-m) + |a_1| c'(2m + 1).$$

Dowód. Zauważmy, że warunek (2.6) zachodzi z $\Gamma_i(y) = a_i y$ dla $y \in Y$ oraz $A_i := |a_i|$ dla $i = 1, \ldots, 6$

Zdefiniujmy $\mu_m \in \mathcal{E}_X$ wzorem: $\mu_m(x) = mx$ dla $x \in X$ i $m \in \mathbb{Z}$. Wtedy zgodnie z wzorem (2.1), dla $m \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} &\widehat{p}_1(\mu_m)x = (2\mu_m + 1)x = (2m+1)x, && \widehat{p}_2(\mu_m)x = \widehat{p}_3(\mu_m)x = -mx, \\ &\widehat{p}_4(\mu_m)x = \widehat{p}_5(\mu_m)x = (m+1)x, && \widehat{p}_6(\mu_m)x = -2mx, \quad x \in X. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Zauważmy, że warunki (2.4), (2.5) i (2.9) zachodzą, zbiór $\mathcal{M}$ jest postaci

$$\mathcal{M} := \{\mu_m \in \mathcal{E}_X : m \in \mathbb{M}\}$$

oraz $c(\mu_m) = c'(m)$ dla $m \in \mathbb{Z}$. Ponadto zbiór $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}_X$, natomiast warunek (2.28) odpowiada (2.8). W konsekwencji możemy zastosować Wniosek 2.1 i na jego podstawie otrzymujemy jedyne rozwiązanie równania (2.26) spełniające warunek (2.29). ■

Poniższy rezultat, wyprowadzony z Wniosku 2.2 i Uwagi 2.1, przedstawia charakteryzację przestrzeni unitarnych.

Wniosek 2.4
Niech X będzie przestrzenią unormowaną nad ciałem $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $b_1, \ldots, b_6 \in \mathbb{K}$ oraz

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x,y,z) := \Big| &\|x+y+z\|^2 + b_1\|x\|^2 + b_2\|y\|^2 + b_3\|z\|^2 \\ &-b_4\|x+y\|^2 - b_5\|x+z\|^2 - b_6\|y+z\|^2 \Big| \end{aligned}$$

dla $x, y, z \in X$. Załóżmy, że zachodzi jeden z dwóch poniższych warunków:

(i) *istnieją injekcje $d_1, d_2, d_3 \in \mathcal{E}_X$ i liczby rzeczywiste dodatnie $w_0, t_1, t_2, t_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ takie, że*

$$\epsilon := \sup_{x,y,z \in X} \mathcal{F}(x,y,z)\Big(\lambda_1\|d_1x\|^{t_1} + \lambda_2\|d_2y\|^{t_2} + \lambda_3\|d_3z\|^{t_3}\Big)^{w_0} < \infty;$$

(ii) *istnieją injekcje $d_1, d_2, d_3 \in \mathcal{E}_X$ i nieujemne liczby rzeczywiste p, t, u takie, że $p + t + u > 0$ oraz*

$$\epsilon := \sup_{x,y,z \in X} \mathcal{F}(x,y,z)\|d_1x\|^p\|d_2y\|^t\|d_3z\|^u < \infty.$$

Wtedy $b_1 = \ldots = b_6 = 1$ oraz X jest przestrzenią unitarną.

Dowód. Zauważmy, że warunek (2.6) zachodzi z $A_i := |b_i|$ dla $i = 1, \ldots, 6$. Niech zbiór $\mathcal{P}$ będzie dany jak w Uwadze 2.1 oraz $f(x) = \|x\|^2$ dla $x \in X$. Wtedy dla $m \in \mathbb{Q}$ określamy funkcje μ_m jak w dowodzie Wniosku 2.3. Wówczas zachodzą równości (2.30), a w konsekwencji warunki (2.4) oraz (2.5) są spełnione.

Jeśli założenie (i) jest spełnione, to nierówność (2.7) zachodzi z funkcją L zadaną jak w Uwadze 2.1 (a) (z liczbą rzeczywistą $w = -w_0 < 0$). Ponadto dla zbioru $\mathcal{M}$ postaci (2.23), tj.

$$\mathcal{M} := \{\mu_m \in \mathcal{E}_X : m \in (K, \infty) \cap \mathbb{Q}\},$$

gdzie $K > 0$ jest dostatecznie dużą liczbą rzeczywistą, zachodzą warunki (2.21) i (2.8) z funkcją $c(\mu_m)$ postaci (2.22).

Jeśli natomiast założenie (ii) jest spełnione, to otrzymujemy warunek (2.7) dla L danej jak w Uwadze 2.1 (b) (z liczbą $s = -1$). Ponadto dla zbioru $\mathcal{M}$ postaci (2.24), tj.

$$\mathcal{M} := \{\mu_m \in \mathcal{E}_X : m \in (0, K) \cap \mathbb{Q}\},$$

gdzie $K > 0$ jest dostatecznie dużą liczbą rzeczywistą, spełnione są warunki (2.21) i (2.8), gdzie $c(\mu_m)$ jest zdefiniowana wzorem (2.25).

W konsekwencji możemy zastosować Wniosek 2.2, na podstawie którego otrzymujemy, że f jest rozwiązaniem równania (2.26) z $D(x, y, z) \equiv 0$, $a_i = -b_i$ dla $i = 1, 2, 3$ oraz $a_j = b_j$ dla $j = 4, 5, 6$, tj. równania

$$\begin{aligned} f(x+y+z) \quad &+ b_1 f(x) + b_2 f(y) + b_3 f(z) = \\ & b_4 f(x+y) + b_5 f(x+z) + b_6 f(y+z). \end{aligned} \tag{2.31}$$

Następnie pokażemy, że $b_1 = \ldots = b_6 = 1$. Podstawmy wyrażenie αx za zmienną x, βx za zmienną y i γx za zmienną z do równania (2.31), gdzie $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$. Wówczas korzystając z postaci funkcji f otrzymujemy

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2 + b_1\alpha^2 + b_2\beta^2 + b_3\gamma^2 = b_4(\alpha+\beta)^2 + b_5(\alpha+\gamma)^2 + b_6(\beta+\gamma)^2 \tag{2.32}$$

dla dowolnych $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$.

Biorąc $\alpha = 1, \beta = \gamma = 0$ w (2.32) mamy $1 + b_1 = b_4 + b_5$. Następnie dla $\beta = -\alpha = 1$ i $\gamma = 0$ w (2.32) otrzymujemy równość $b_1 + b_2 = b_5 + b_6$, a w konsekwencji

$$1 - b_2 = b_4 - b_6. \tag{2.33}$$

Analogicznie z $\beta = 1, \alpha = \gamma = 0$ i $\beta = -\gamma = 1$, $\alpha = 0$ otrzymujemy

$$1 - b_3 = b_6 - b_5, \tag{2.34}$$

oraz $\gamma = 1, \alpha = \beta = 0$ i $\alpha = -\gamma = 1$, $\beta = 0$ daje

$$1 - b_1 = b_5 - b_4. \tag{2.35}$$

Następnie wstawiając $1 = \alpha = -\beta = -\gamma$, $1 = -\alpha = \beta = -\gamma$ i $1 = -\alpha = -\beta = \gamma$ do (2.32) dostajemy odpowiednio

$$\begin{cases} 1 + b_1 + b_2 + b_3 = 4b_6, \\ 1 + b_1 + b_2 + b_3 = 4b_5, \\ 1 + b_1 + b_2 + b_3 = 4b_4. \end{cases} \tag{2.36}$$

Stąd $b_4 = b_5 = b_6$ i w konsekwencji warunków (2.33)-(2.35) otrzymujemy $1 = b_1 = b_2 = b_3$. Ostatecznie z uwagi na (2.36) $1 = b_1 = ... = b_6$. Funkcja f spełnia więc równanie (3), a zatem zachodzi warunek (4). Ostatecznie na mocy wyniku Frécheta [30] otrzymujemy, że X jest przestrzenią unitarną. ■

W kolejnym wniosku również przedstawiamy pewną charakteryzację przestrzeni unitarnych. Rezultat jest następujący.

Wniosek 2.5
Niech X będzie przestrzenią unormowaną nad ciałem $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{K}$ oraz

$$\mathcal{Q}(x, y) := \Big| \|x+y\|^2 + b_1\|x-y\|^2 - b_2\|x\|^2 - b_3\|y\|^2 \Big|$$

dla $x, y \in X$. Załóżmy, że jeden z dwóch następujących warunków jest spełniony:

(i) *istnieją injekcje $d_1, d_2 \in \mathcal{E}_X$ i takie dodatnie liczby rzeczywiste $\lambda_1, \lambda_2, w_0, t_1, t_2$, że*

$$\sup_{x,y\in X} \mathcal{Q}(x, y)\Big(\lambda_1\|d_1x\|^{t_1} + \lambda_2\|d_2y\|^{t_2}\Big)^{w_0} < \infty;$$

(ii) *istnieją injekcje $d_1, d_2 \in \mathcal{E}_X$ i takie nieujemne liczby rzeczywiste p, t, że $p + t > 0$ oraz*

$$\sup_{x,y\in X} \mathcal{Q}(x, y)\|d_1x\|^p\|d_2y\|^t < \infty.$$

Wtedy X jest przestrzenią unitarną oraz $b_3 = b_2 = 2$, $b_1 = 1$.

Dowód. Analogicznie jak w dowodzie Wniosku 2.4 stosujemy Uwagę 2.1 i Wniosek 2.2 (dla $s = r = 2$ i $l = 3$) dla $f(x) \equiv \|x\|^2$ i otrzymujemy, że

$$\|x+y\|^2 + b_1\|x-y\|^2 = b_2\|x\|^2 + b_3\|y\|^2, \qquad x, y \in X. \tag{2.37}$$

Następnie wstawiamy $x = 0$, a potem $y = 0$ w warunku (2.37) i dostajemy odpowiednio

$$1 + b_1 = b_3, \quad 1 + b_1 = b_2.$$

Stąd z powyższych dwóch warunków mamy, że $b_3 = b_2$. Dalej warunek (2.37) z $x = y$ oraz $x = -y$ skutkuje

$$4 = b_2 + b_3, \quad 4b_1 = b_2 + b_3,$$

a więc $1 = b_1$. Wówczas $b_3 = b_2 = 2$, a w konsekwencji otrzymujemy, że f jest funkcją kwadratową. Spełnienie warunku Jordana i von Neumanna oznacza, że X jest przestrzenią unitarną. ∎

Następny wniosek nawiązuje do rezultatów zawartych w publikacji [49, Wniosek 3].

Wniosek 2.6
Niech X będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, Y jest przestrzenią Banacha nad ciałem $\mathbb{K}$ oraz funkcje $\overline{d}_1, \overline{d}_2 : X \to X$ niech będą izomorfizmami. Niech $f : X \to Y$, $\Gamma_i : Y \to Y$ dla $i = 1, 2$, $\lambda_1, \lambda_2, q_1, q_2 \in (0, \infty)$, $w \in (-\infty, 0)$ oraz zachodzą dwa następujące warunki:

$$\|f(\overline{d}_1x + \overline{d}_2y) - \Gamma_1(f(x)) - \Gamma_2(f(y))\| \leqslant (\lambda_1\|x\|^{q_1} + \lambda_2\|y\|^{q_2})^w, \quad (x, y) \in X^2 \setminus \{(0, 0)\},$$

$$f(0) = \Gamma_1(f(0)) + \Gamma_2(f(0)). \tag{2.38}$$

Wtedy funkcja f spełnia równanie

$$f(\overline{d}_1x + \overline{d}_2y) = \Gamma_1(f(x)) + \Gamma_2(f(y)), \qquad x, y \in X. \tag{2.39}$$

Dowód. Wstawiając $u := \overline{d}_1 x$, $v := \overline{d}_2 y$ w warunku (2.38) dostajemy

$$\Big\| f(u+v) - \Gamma_1\Big(f(d_1 u)\Big) - \Gamma_2\Big(f(d_2 v)\Big)\Big\| \leqslant \Big(\lambda_1 \|d_1 u\|^{q_1} + \lambda_2 \|d_2 v\|^{q_2}\Big)^w, \quad u, v \in X,$$

z $d_1 = \overline{d}_1^{\;-1}$ i $d_2 = \overline{d}_2^{\;-1}$. Uwzględniając drugi z warunków (2.38) dostajemy, że zachodzi warunek (2.7) dla $s = l = r = 2$,

$$p_1(u,v) = d_1 u, \qquad p_2(u,v) = d_2 v, \quad u, v \in X,$$

$$L(0,0) = 0, \qquad L(u,v) = \Big(\lambda_1 \|d_1 u\|^{q_1} + \lambda_2 \|d_2 v\|^{q_2}\Big)^w, \qquad (u,v) \in X^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Zatem, podobnie jak w dowodzie Wniosku 2.4, stosując Uwagę 2.1(a) dowodzimy, że założenia Wniosku 2.2 są spełnione, a stąd f spełnia równanie

$$f(u+v) = \Gamma_1\Big(f(d_1 u)\Big) + \Gamma_2\Big(f(d_2 v)\Big), \qquad u, v \in X.$$

Zatem f jest rozwiązaniem równania (2.39). ∎

Rozdział 3

Stabilność na zacieśnionej dziedzinie

W tym rozdziale zostaną przedstawione rezultaty wykazane w [42, 20, 21] i dotyczące stabilności na zacieśnionej dziedzinie równania funkcyjnego (2), tj.

$$\begin{aligned} A_1F(x+y+z) + A_2F(x) + A_3F(y) + A_4F(z) \\ = A_5F(x+y) + A_6F(x+z) + A_7F(y+z), \end{aligned} \tag{3.1}$$

będącego szczególnym przypadkiem równania funkcyjnego (1).

Wyniki tego rozdziału dopełniają wyniki z poprzedniego rozdziału, a także korespondują z rezultatami w [17, 24] oraz klasycznymi wynikami dotyczącymi stabilności równań funkcyjnych w [13, 49], ujmując rozważany problem w sposób bardziej szczegółowy. Motywacją do ich uzyskania było naturalne pytanie o zależność stabilności równania (3.1) od współczynników $A_1, ..., A_7$, występujących w tym równaniu i zbadanie tego problemu dla możliwie szerokiego zakresu wartości tych współczynników na zacieśnionej dziedzinie, przy możliwie najsłabszych założeniach o X.

Rozważmy następujący układ równań liniowych

$$\begin{cases} A_2 + A_3 + A_4 = 0 \\ A_1 + A_2 + A_3 = 0 \\ A_1 + A_2 + A_4 = 0 \\ A_1 + A_3 + A_4 = 0 \\ -A_2 - A_3 + A_6 + A_7 = 0 \\ -A_2 - A_4 + A_5 + A_7 = 0 \\ -A_3 - A_4 + A_5 + A_6 = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Macierz tego układu jest postaci

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Wyznacznik tej macierzy jest równy 6. Zatem, w przypadku gdy nie wszystkie parametry $A_1, \dots, A_7$ są równe 0, co najmniej jedno z równań układu (3.2) nie jest spełnione.

Teraz wymienimy podstawienia (za zmienne x, y, z), które będą stosowane oraz równania jednej zmiennej otrzymane z równania (2) za pomocą tych podstawień:

(I) $x = t,\ y = t,\ z = t$

$$A_1F(3t) + (A_2 + A_3 + A_4)F(t) = (A_5 + A_6 + A_7)F(2t), \tag{3.3}$$

(II) $x = t,\ y = t,\ z = -t$

$$(A_1 + A_2 + A_3)F(t) + A_4F(-t) = A_5F(2t) + (A_6 + A_7)F(0), \tag{3.4}$$

(III) $x = t,\ y = -t,\ z = t$

$$(A_1 + A_2 + A_4)F(t) + A_3F(-t) = (A_5 + A_7)F(0) + A_6F(2t), \tag{3.5}$$

(IV) $x = -t,\ y = t,\ z = t$

$$(A_1 + A_3 + A_4)F(t) + A_2F(-t) = (A_5 + A_6)F(0) + A_7F(2t), \tag{3.6}$$

(V) $x = t,\ y = t,\ z = 0$

$$(A_6 + A_7 - A_2 - A_3)F(t) = (A_1 - A_5)F(2t) + A_4F(0), \tag{3.7}$$

(VI) $x = t,\ y = 0,\ z = t$

$$(A_5 + A_7 - A_2 - A_4)F(t) = (A_1 - A_6)F(2t) + A_3F(0), \tag{3.8}$$

(VII) $x = 0,\ y = t,\ z = t$

$$(A_5 + A_6 - A_3 - A_4)F(t) = (A_1 - A_7)F(2t) + A_2F(0), \tag{3.9}$$

Na końcu niniejszego rozdziału przedstawione zostaną zastosowania wyników, które dotyczyć będą hiperstabilności rozważanego równania funkcyjnego oraz nowych nierówności charakteryzujących przestrzenie unitarne.

3.1 Przypadek (I)

Sformułujemy teraz najważniejsze twierdzenie tego podrozdziału opublikowane w [20]. W Twierdzeniu 3.1 zakładamy o X jedynie, że jest przemiennym monoidem. Twierdzenie to, jak również niektóre następne twierdzenia bazują na twierdzeniu o stałym punkcie dla przestrzeni funkcyjnej z pracy [15].

Twierdzenie 3.1
Załóżmy,że $(X,+)$ *jest przemiennym monoidem,* Y *jest przestrzenią Banacha nad ciałem* $\mathbb{K}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$*, oraz* $A_1,\ldots,A_7\in\mathbb{K}$*. Niech* $D\subset X$*,* $0\in D$*,*

$$2x, 3x \in D, \qquad x \in D,$$

$\widehat{D}:=D^3\setminus\{(0,0,0)\}$*,* $A_2+A_3+A_4\neq 0$*,*

$$\beta_0 := \left|\frac{A_5+A_6+A_7-A_1}{A_2+A_3+A_4}\right| < 1$$

oraz funkcja $L\colon D^3\to[0,\infty)$ *spełnia warunek*

$$L(kx,ky,kz)\leqslant c_k L(x,y,z), \qquad (x,y,z)\in\widehat{D}, k\in\{2,3\}, \tag{3.10}$$

z pewnymi takimi stałymi $c_2,c_3\in[0,\infty)$*, że* $\beta:=b_2c_2+b_3c_3<1$*, gdzie*

$$b_2 := \left|\frac{A_5+A_6+A_7}{A_2+A_3+A_4}\right|, \qquad b_3 := \left|\frac{A_1}{A_2+A_3+A_4}\right|. \tag{3.11}$$

Jeśli funkcja $f\colon D\to Y$ *spełnia następującą nierówność*

$$\begin{aligned}\|A_1f(x+y+z)\ &+A_2f(x)+A_3f(y)+A_4f(z)\\ &-A_5f(x+y)-A_6f(x+z)-A_7f(y+z)\|\leqslant L(x,y,z),\\ &\qquad (x,y,z)\in D^3,\ x+y+z, x+y, x+z, y+z\in D,\end{aligned} \tag{3.12}$$

to istnieje taka jedyna funkcja $F:D\to Y$*, że*

$$\begin{aligned}A_1f(x+y+z)\ &+A_2f(x)+A_3f(y)+A_4f(z)\\ &=A_5f(x+y)+A_6f(x+z)+A_7f(y+z)\\ &\qquad (x,y,z)\in D^3,\ x+y+z, x+y, x+z, y+z\in D,\end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\|f(x)-F(x)\|\leqslant\rho_L(x), \qquad x\in D, \tag{3.14}$$

gdzie

$$\rho_L(x) := \frac{L(x,x,x)}{|A_2+A_3+A_4|(1-\gamma(x))}, \qquad x\in D, \tag{3.15}$$

z

$$\gamma(x) := \begin{cases}\beta & \text{jeśli} \quad x\neq 0;\\ \beta_0 & \text{jeśli} \quad x=0.\end{cases}$$

Dowód. Podstawiając $y = z = x$ w nierówności (3.12) otrzymujemy

$$\|A_1 f(3x) + (A_2 + A_3 + A_4) f(x) - (A_5 + A_6 + A_7) f(2x)\| \leqslant L(x, x, x), \quad x \in D.$$

Zatem dla każdego $x \in D$ dostajemy nierówność

$$\left\| f(x) - \frac{A_5 + A_6 + A_7}{A_2 + A_3 + A_4} f(2x) + \frac{A_1}{A_2 + A_3 + A_4} f(3x) \right\| \leqslant \varepsilon(x), \tag{3.16}$$

gdzie

$$\varepsilon(x) := \frac{L(x, x, x)}{|A_2 + A_3 + A_4|}.$$

Zdefiniujmy operator liniowy $\mathcal{T} : Y^D \to Y^D$ wzorem

$$\mathcal{T}\xi(x) := \frac{A_5 + A_6 + A_7}{A_2 + A_3 + A_4} \xi(2x) - \frac{A_1}{A_2 + A_3 + A_4} \xi(3x), \qquad \xi \in Y^D,\ x \in D. \tag{3.17}$$

W szczególnym przypadku, gdy $x = 0$ mamy

$$\mathcal{T}\xi(0) = \frac{A_5 + A_6 + A_7 - A_1}{A_2 + A_3 + A_4} \xi(0), \qquad \xi \in Y^D. \tag{3.18}$$

Z warunku (3.16) bezpośrednio wynika, że

$$\|f(x) - \mathcal{T} f(x)\| \leqslant \varepsilon(x), \quad x \in D,$$

co oznacza, że warunek (1.6) w Twierdzeniu 1.1 zachodzi. W przypadku, gdy $x = 0$ z (3.16) i (3.18) mamy

$$\|f(0) - \mathcal{T} f(0)\| = \left| 1 - \frac{A_5 + A_6 + A_7 - A_1}{A_2 + A_3 + A_4} \right| \|f(0)\| \leqslant \varepsilon(0).$$

Teraz pokażemy, że warunek (H2) w Twierdzeniu 1.1 jest spełniony z $k = 3$, $S = D$, $E = Y$, $f_1(x) = 2x$, $f_2(x) = 3x$, $f_3(x) = x$ oraz

$$l_1(x) := \begin{cases} b_2 & \text{jeśli} \quad x \neq 0; \\ 0 & \text{jeśli} \quad x = 0, \end{cases}$$

$$l_2(x) \quad := \begin{cases} b_3 & \text{jeśli} \quad x \neq 0; \\ 0 & \text{jeśli} \quad x = 0, \end{cases}$$

$$l_3(x) \quad := \begin{cases} 0 & \text{jeśli} \quad x \neq 0; \\ \beta_0 & \text{jeśli} \quad x = 0, \end{cases}$$

tzn.

$$\|\mathcal{T}\xi(x) \ - \mathcal{T}\mu(x)\| \leqslant \sum_{i=1}^{3} l_i(x) \|\xi(f_i(x)) - \mu(f_i(x))\|, \quad \xi, \eta \in Y^D, x \in D.$$

Ustalmy $\xi, \mu \in Y^D$. Wtedy dla każdego $x \in D$ mamy

$$\begin{aligned}\|\mathcal{T}\xi(x) - \mathcal{T}\mu(x)\| = \|&\frac{A_5 + A_6 + A_7}{A_2 + A_3 + A_4}(\xi(2x) - \mu(2x)) \\ &- \frac{A_1}{A_2 + A_3 + A_4}(\xi(3x) - \mu(3x))\|.\end{aligned}$$

Stąd z nierówności trójkąta otrzymujemy, że

$$\begin{aligned}\|\mathcal{T}\xi(x) - \mathcal{T}\mu(x)\| \leqslant &\left|\frac{A_5 + A_6 + A_7}{A_2 + A_3 + A_4}\right| \|\xi(2x) - \mu(2x)\| \\ + &\left|\frac{A_1}{A_2 + A_3 + A_4}\right| \|\xi(3x) - \mu(3x)\|.\end{aligned}$$

Zatem

$$\|\mathcal{T}\xi(x) - \mathcal{T}\mu(x)\| \leqslant b_2 \|\xi(2x) - \mu(2x)\| + b_3 \|\xi(3x) - \mu(3x)\|, \quad x \in D \setminus \{0\}. \tag{3.19}$$

W przypadku, gdy $x = 0$ mamy następującą równość

$$\begin{aligned}\|\mathcal{T}\xi(0) - \mathcal{T}\mu(0)\| &= \left\|\frac{A_5 + A_6 + A_7 - A_1}{A_2 + A_3 + A_4}(\xi(0) - \mu(0))\right\| \\ &= \left|\frac{A_5 + A_6 + A_7 - A_1}{A_2 + A_3 + A_4}\right| \|\xi(0) - \mu(0)\|.\end{aligned}$$

Zatem

$$\|\mathcal{T}\xi(0) \ - \mathcal{T}\mu(0)\| \leqslant \beta_0 \|\xi(0) - \mu(0)\|. \tag{3.20}$$

To oznacza, że warunek (H2) jest spełniony.

Następnie definiujmy $\Lambda : {\mathbb{R}_+}^D \to {\mathbb{R}_+}^D$ tak jak w warunku (H3) jako

$$\Lambda\eta(x) := \sum_{i=1}^{3} l_i(x)\eta(f_i(x)), \quad x \in D \tag{3.21}$$

dla każdego $\eta \in {\mathbb{R}_+}^D$. Wtedy dla każdego $\eta \in {\mathbb{R}_+}^D$ mamy

$$\Lambda\eta(x) := b_2\, \eta(2x) + b_3\, \eta(3x), \quad x \in D \setminus \{0\}$$

oraz

$$\Lambda\eta(0) := \beta_0\eta(0). \tag{3.22}$$

Zauważmy, że odwzorowanie Λ, tak jak operator $\mathcal{T}$, jest liniowe. Pokażemy, że Λ jest niemalejące, tzn. dla wszystkich $\eta, \zeta \in {\mathbb{R}_+}^D$, jeśli $\eta \leqslant \zeta$ (tzn. $\eta(x) \leqslant \zeta(x)$ dla $x \in D$), to $\Lambda\eta \leqslant \Lambda\zeta$. Weźmy dowolne takie funkcje $\eta, \zeta \in {\mathbb{R}_+}^D$, że $\eta \leqslant \zeta$. Z powyższej definicji i postaci Λ dla każdego $x \in D$ dostajemy

$$\begin{aligned}\Lambda\eta(x) - \Lambda\zeta(x) &= b_2\, \eta(2x) + b_3\, \eta(3x) - (b_2\, \zeta(2x) + b_3\, \zeta(3x)) \\ &= b_2\, (\eta(2x) - \zeta(2x)) + b_3\, (\eta(3x) - \zeta(3x)) \leqslant 0,\end{aligned}$$

ponieważ $b_2 \geqslant 0$, $b_3 \geqslant 0$. Zatem $\Lambda\eta(x) \leqslant \Lambda\zeta(x)$ dla $x \in D$, co kończy dowód monotoniczności.

Zauważmy ponadto, że z (3.19) oraz (3.20) mamy

$$\|\mathcal{T}\xi(x) - \mathcal{T}\mu(x)\| \leqslant \Lambda(\|\xi - \mu\|)(x), \qquad \xi, \mu \in Y^D, x \in D, \tag{3.23}$$

gdzie funkcja $\|\xi - \mu\| \in \mathbb{R}^D$ jest dana wzorem $\|\xi - \mu\|(x) = \|\xi(x) - \mu(x)\|$ dla $x \in D$.

Teraz pokażemy, że warunek (1.7) w Twierdzeniu 1.1 jest spełniony, tzn. szereg funkcyjny $\sum_{n=0}^{\infty} \Lambda^n \varepsilon(x)$ jest zbieżny dla każdego $x \in D$. Ustalmy $x \in D \setminus \{0\}$. Z warunków (3.21) i (3.10) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\Lambda\varepsilon(x) &= b_2\, \varepsilon(2x) + b_3\, \varepsilon(3x) = b_2\, \frac{L(2x, 2x, 2x)}{|A_2 + A_3 + A_4|} + b_3\, \frac{L(3x, 3x, 3x)}{|A_2 + A_3 + A_4|} \\
&\leqslant b_2 c_2 \frac{L(x, x, x)}{|A_2 + A_3 + A_4|} + b_3 c_3 \frac{L(x, x, x)}{|A_2 + A_3 + A_4|} \\
&= (b_2 c_2 + b_3 c_3) \frac{L(x, x, x)}{|A_2 + A_3 + A_4|}.
\end{aligned}$$

Zatem

$$\Lambda\varepsilon(x) \leqslant \beta\varepsilon(x). \tag{3.24}$$

Indukcyjnie pokażemy, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$

$$\Lambda^n \varepsilon(x) \leqslant \beta^n \varepsilon(x), \qquad x \in D. \tag{3.25}$$

Dla $n = 1$ warunek (3.25) jest spełniony na mocy (3.24). Załóżmy, że (3.25) zachodzi dla ustalonego n. Z założenia indukcyjnego i monotoniczności Λ otrzymujemy

$$\Lambda^{n+1}\varepsilon(x) \;=\; \Lambda(\Lambda^n \varepsilon)(x) \leqslant \Lambda(\beta^n \varepsilon)(x), \qquad x \in D,$$

a następnie z liniowości Λ oraz (3.24) dostajemy

$$\Lambda^{n+1}\varepsilon(x) \;\leqslant\; \beta^n(\Lambda\varepsilon)(x) \leqslant \beta^n \beta\varepsilon(x) = \beta^{n+1}\varepsilon(x), \qquad x \in D,$$

co kończy dowód warunku (3.25). W konsekwencji dla każdego $x \in D \setminus \{0\}$ mamy następujące oszacowanie:

$$\varepsilon^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Lambda^n \varepsilon(x) \leqslant \varepsilon(x) \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n = \frac{\varepsilon(x)}{1 - \beta} = \frac{L(x, x, x)}{|A_2 + A_3 + A_4|(1 - \beta)}.$$

W przypadku, gdy $x = 0$, z (3.22) dostajemy

$$\Lambda^n \varepsilon(0) = \beta_0^n \varepsilon(0), \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{3.26}$$

a więc

$$\varepsilon^*(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \Lambda^n \varepsilon(0) = \varepsilon(0) \sum_{n=0}^{\infty} \beta_0^n = \frac{\varepsilon(0)}{1 - \beta_0} = \frac{L(0, 0, 0)}{|A_2 + A_3 + A_4|(1 - \beta_0)}.$$

Zatem zostało pokazane, że

$$\varepsilon^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Lambda^n \varepsilon(x) \leqslant \frac{L(x,x,x)}{|A_2 + A_3 + A_4|(1-\gamma(x))} < \infty, \qquad x \in D.$$

Z Twierdzenia 1.1 (z $S = D$ i $E = Y$) istnieje funkcja $F\colon D \to Y$ spełniająca równanie

$$F(x) = \frac{A_5 + A_6 + A_7}{A_2 + A_3 + A_4} F(2x) - \frac{A_1}{A_2 + A_3 + A_4} F(3x), \qquad x \in D, \tag{3.27}$$

taka, że

$$\|f(x) - F(x)\| \leqslant \varepsilon^*(x) \leqslant \frac{L(x,x,x)}{|A_2 + A_3 + A_4|(1-\gamma(x))}, \qquad x \in D.$$

Ponadto

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{T}^n f(x), \qquad x \in D.$$

Zauważmy, że warunek (3.27) oznacza, że równanie (3.13) jest spełnione dla $x = y = z$. Pokażemy, że funkcja F spełnia (3.13).

Najpierw udowodnimy indukcyjnie, że dla wszystkich $(x,y,z) \in D^3$ takich, że $x+y+z, x+y, x+z, y+z \in D$, oraz $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ zachodzi warunek

$$\begin{aligned} &\|A_1\, \mathcal{T}^n f(x+y+z) + A_2 \mathcal{T}^n f(x) + A_3 \mathcal{T}^n f(y) + A_4 \mathcal{T}^n f(z) \\ &\quad - A_5 \mathcal{T}^n f(x+y) - A_6 \mathcal{T}^n f(x+z) - A_7 \mathcal{T}^n f(y+z)\| \\ &\leqslant \lambda^n\, L(x,y,z), \end{aligned} \tag{3.28}$$

gdzie $\lambda := \max\{\beta, \beta_0\}$.

Dla $n = 0$ warunek (3.28) wynika bezpośrednio z (3.12). Załóżmy, że (3.28) zachodzi dla pewnego $n \in \mathbb{N}_0$ oraz wszystkich $(x,y,z) \in D^3$, takich że $x+y+z, x+y, x+z, y+z \in D$. Wtedy z założenia indukcyjnego mamy

$$\begin{aligned} &\Big\| A_1 \mathcal{T}^{n+1} f(x+y+z) + A_2 \mathcal{T}^{n+1} f(x) + A_3 \mathcal{T}^{n+1} f(y) + A_4 \mathcal{T}^{n+1} f(z) \\ &\qquad - A_5 \mathcal{T}^{n+1} f(x+y) - A_6 \mathcal{T}^{n+1} f(x+z) - A_7 \mathcal{T}^{n+1} f(y+z) \Big\| \\ &= \Big\| \frac{A_5 + A_6 + A_7}{A_2 + A_3 + A_4} A_1 \mathcal{T}^n f(2(x+y+z)) - \frac{A_1}{A_2 + A_3 + A_4} A_1 \mathcal{T}^n f(3(x+y+z)) \\ &\qquad + \frac{A_5 + A_6 + A_7}{A_2 + A_3 + A_4} A_2 \mathcal{T}^n f(2x) - \frac{A_1}{A_2 + A_3 + A_4} A_2 \mathcal{T}^n f(3x) \\ &\qquad + \frac{A_5 + A_6 + A_7}{A_2 + A_3 + A_4} A_3 \mathcal{T}^n f(2y) - \frac{A_1}{A_2 + A_3 + A_4} A_3 \mathcal{T}^n f(3y) \\ &\qquad + \frac{A_5 + A_6 + A_7}{A_2 + A_3 + A_4} A_4 \mathcal{T}^n f(2z) - \frac{A_1}{A_2 + A_3 + A_4} A_4 \mathcal{T}^n f(3z) \\ &\qquad - \frac{A_5 + A_6 + A_7}{A_2 + A_3 + A_4} A_5 \mathcal{T}^n f(2(x+y)) + \frac{A_1}{A_2 + A_3 + A_4} A_5 \mathcal{T}^n f(3(x+y)) \\ &\qquad - \frac{A_5 + A_6 + A_7}{A_2 + A_3 + A_4} A_6 \mathcal{T}^n f(2(x+z)) + \frac{A_1}{A_2 + A_3 + A_4} A_6 \mathcal{T}^n f(3(x+z)) \\ &\qquad - \frac{A_5 + A_6 + A_7}{A_2 + A_3 + A_4} A_7 \mathcal{T}^n f(2(y+z)) + \frac{A_1}{A_2 + A_3 + A_4} A_7 \mathcal{T}^n f(3(y+z)) \Big\| \\ &\leqslant \left| \frac{A_5 + A_6 + A_7}{A_2 + A_3 + A_4} \right| \lambda^n L(2x, 2y, 2z) + \left| \frac{A_1}{A_2 + A_3 + A_4} \right| \lambda^n L\Big(3x, 3y, 3z\Big) \end{aligned}$$

dla wszystkich $(x,y,z) \in D^3$ takich, że $x+y+z, x+y, x+z, y+z \in D$. Jeśli $(x,y,z) \in \widehat{D}$, to z założenia (3.10)

$$\begin{aligned}
&\Big\| A_1 \mathcal{T}^{n+1} f(x+y+z) + A_2 \mathcal{T}^{n+1} f(x) + A_3 \mathcal{T}^{n+1} f(y) + A_4 \mathcal{T}^{n+1} f(z) \\
&\qquad - A_5 \mathcal{T}^{n+1} f(x+y) - A_6 \mathcal{T}^{n+1} f(x+z) - A_7 \mathcal{T}^{n+1} f(y+z) \Big\| \\
&\leqslant \lambda^n (b_2 c_2 + b_3 c_3) L(x,y,z) \leqslant \lambda^{n+1} L(x,y,z).
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Jeśli natomiast $x = y = z = 0$, to z (3.18) mamy

$$\begin{aligned}
&\Big\| (A_1 + A_2 + A_3 + A_4 - A_5 - A_6 - A_7) \mathcal{T}^{n+1} f(0) \Big\| \\
&= \Big\| (A_1 + A_2 + A_3 + A_4 - A_5 - A_6 - A_7) \frac{A_5 + A_6 + A_7 - A_1}{A_2 + A_3 + A_4} \mathcal{T}^n f(0) \Big\| \\
&\leqslant \beta_0 \Big\| (A_1 + A_2 + A_3 + A_4 - A_5 - A_6 - A_7) \mathcal{T}^n f(0) \Big\| \\
&\leqslant \beta_0 \lambda^n L(0,0,0) \leqslant \lambda^{n+1} L(0,0,0),
\end{aligned}$$

co kończy dowód (3.28). Biorąc $n \to \infty$ w (3.28) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&A_1 F(x+y+z) + A_2 F(x) + A_3 F(y) + A_4 F(z) \\
&\quad = A_5 F(x+y) + A_6 F(x+z) + A_7 F(y+z), \qquad (x,y,z) \in D^3.
\end{aligned}$$

Zatem zostało dowiedzione, że istnieje funkcja $F : D \to Y$ spełniająca równanie (3.13) taka, że

$$\|f(x) - F(x)\| \leqslant \varepsilon^*(x) \leqslant \rho_L(x), \qquad x \in D. \tag{3.30}$$

Teraz pokażemy, że $F(0) = 0$. Z (3.17) dostajemy indukcyjnie, że

$$\mathcal{T}^n \xi(0) = \left(\frac{A_5 + A_6 + A_7 - A_1}{A_2 + A_3 + A_4} \right)^n \xi(0) = \beta_0^n \xi(0), \qquad \xi \in Y^D, n \in \mathbb{N}.$$

Zatem

$$\lim_{n \to \infty} \mathcal{T}^n \xi(0) = 0, \qquad \xi \in Y^D, \tag{3.31}$$

ponieważ $\beta_0 < 1$. W konsekwencji mamy $F(0) = \lim_{n \to \infty} \mathcal{T}^n f(0) = 0$.

Pozostaje do udowodnienia, że funkcja F jest jedynym rozwiązaniem równania (3.13). Żeby to otrzymać, najpierw pokażemy indukcyjnie, że dla wszystkich funkcji $\xi, \mu \in Y^D$ oraz dla $n \in \mathbb{N}_0$

$$\|\mathcal{T}^n \xi(x) - \mathcal{T}^n \mu(x)\| \leqslant \Lambda^n (\|\xi - \mu\|)(x), \qquad x \in D. \tag{3.32}$$

Zauważmy, że dla $n = 0$ warunek (3.32) jest oczywisty. Ustalmy $\xi, \mu \in Y^D$ oraz załóżmy, że warunek (3.32) zachodzi dla $n \in \mathbb{N}_0$. Wtedy z (3.23)

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{T}^{n+1} \xi(x) - \mathcal{T}^{n+1} \mu(x)\| &= \|\mathcal{T}(\mathcal{T}^n \xi)(x) - \mathcal{T}(\mathcal{T}^n \mu)(x)\| \\
&\leqslant \Lambda(\|\mathcal{T}^n \xi - \mathcal{T}^n \mu\|)(x), \qquad x \in D.
\end{aligned}$$

Zatem z założenia indukcyjnego i monotoniczności Λ otrzymujemy

$$\|\mathcal{T}^{n+1}\xi(x) - \mathcal{T}^{n+1}\mu(x)\| \leqslant \Lambda(\Lambda^n(\|\xi - \mu\|))(x) = \Lambda^{n+1}(\|\xi - \mu\|)(x), \qquad x \in D.$$

Następnie załóżmy, że $G : D \to Y$ jest również rozwiązaniem równania (3.13) spełniającym nierówność

$$\|f(x) - G(x)\| \leqslant \rho_L(x), \qquad x \in D.$$

Wtedy

$$\|G(x) - F(x)\| \leqslant 2\rho_L(x), \qquad x \in D. \tag{3.33}$$

Zatem z (3.32) mamy

$$\|\mathcal{T}^n G(x) - \mathcal{T}^n F(x)\| \leqslant 2\Lambda^n \rho_L(x) = \frac{2\Lambda^n \varepsilon(x)}{1 - \gamma(x)}, \qquad x \in D,$$

ponieważ Λ jest liniowe i niemalejące. Biorąc $n \to \infty$, ze zbieżności szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} \Lambda^n \varepsilon(x)$ dostajemy

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathcal{T}^n G(x) - \mathcal{T}^n F(x)\| = 0, \qquad x \in D.$$

Stąd $\|G(x) - F(x)\| = 0$ dla $x \in D$, ponieważ G oraz F są stałymi punktami operatora $\mathcal{T}$. W konsekwencji $G(x) = F(x)$ dla każdego $x \in D$, co kończy dowód. ■

Założenie $\beta_0 < 1$ w Twierdzeniu 3.1 może być pominięte, jeśli pominiemy też założenie, że $0 \in D$ (i wtedy nie potrzeba zakładać, że półgrupa $(X, +)$ ma element neutralny) oraz (3.10) zastąpimy warunkiem

$$L(kx, ky, kz) \leqslant c_k L(x, y, z), \qquad (x, y, z) \in D^3, k \in \{2, 3\}. \tag{3.34}$$

Zauważmy, że warunki (3.10) i (3.34) są równoważne, gdy $0 \notin D$ oraz w przypadku, gdy $0 \in D$ i $L(0, 0, 0) = 0$. Mamy więc również następujący wynik.

Twierdzenie 3.2
Niech $(X, +)$ będzie przemienną półgrupą, Y będzie przestrzenią Banacha nad ciałem $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $A_1, \ldots, A_7 \in \mathbb{K}$, zbiór $D \subset X$ będzie niepusty oraz

$$2x, 3x \in D, \qquad x \in D.$$

Załóżmy, że $A_2 + A_3 + A_4 \neq 0$ oraz funkcja $L\colon D^3 \to [0, \infty)$ spełnia warunek (3.34) z $c_2, c_3 \in [0, \infty)$ takimi, że

$$\beta := b_2 c_2 + b_3 c_3 < 1,$$

gdzie b_2, b_3 są zdefiniowane w (3.11). Jeśli $f\colon D \to Y$ spełnia nierówność (3.12), to istnieje taka jedyna funkcja $F : D \to Y$ spełniająca (3.13), że

$$\|f(x) - F(x)\| \leqslant \frac{L(x, x, x)}{|A_2 + A_3 + A_4|(1 - \beta)}, \qquad x \in D.$$

Dowód. Podajemy tylko zarys dowodu, ponieważ główne kroki są takie same jak w dowodzie Twierdzenia 3.1.

Rozważmy operator $\mathcal{T}$ zdefiniowany jako (3.17). Z (3.19) otrzymujemy, że warunek (H2) jest spełniony z $k = 2$, $S = X$, $E = Y$,

$$f_1(t) = 2t, \qquad f_2(t) = 3t,$$
$$l_1(t) = b_2, \qquad l_2(t) = b_3,$$

tzn.

$$\|\mathcal{T}\xi(t) \ - \mathcal{T}\mu(t)\| \leqslant \sum_{i=1}^{2} l_i(t)\|\xi(f_i(t)) - \mu(f_i(t))\|, \qquad \xi, \mu \in Y^X, t \in X.$$

Wtedy operator $\Lambda : {\mathbb{R}_+}^X \to {\mathbb{R}_+}^X$ definiujemy jako

$$\Lambda\eta(t) := \sum_{i=1}^{2} l_i(t)\eta(f_i(t)), \qquad \eta \in {\mathbb{R}_+}^X, t \in X$$

jest postaci

$$\Lambda\eta(t) = b_2\eta(2t) + b_3\eta(3t), \qquad \eta \in {\mathbb{R}_+}^X, t \in X.$$

Z (3.34) dostajemy, że warunek (3.24) zachodzi dla wszystkich $x \in X$ z

$$\varepsilon(x) := \frac{L(x, x, x)}{|A_2 + A_3 + A_4|}.$$

Zatem otrzymujemy, że warunek (3.25) rownież zachodzi dla wszystkich $x \in X$. W konsekwencji dla każdego $x \in X$ mamy

$$\varepsilon^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Lambda^n\varepsilon(x) \leqslant \varepsilon(x)(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta^n) = \frac{\varepsilon(x)}{1 - \beta} = \frac{L(x, x, x)}{|A_2 + A_3 + A_4|(1 - \beta)}.$$

Zauważmy, że (3.28) zachodzi dla $\lambda = \beta$, ponieważ powołując się na (3.34) mamy, że (3.29) zachodzi również dla $x = y = z = 0$.

Istnienie i jednoznaczność F spełniającego rozwiązanie (2) możemy otrzymać w ten sam sposób, jak w dowodzie Twierdzenia 3.1. ■

3.2 Przypadki (II) i (VII)

W tym podrozdziale przedstawimy wyniki udowodnione w [21], dotyczące stabilności równania (2), dla dwóch wybranych przypadków z listy przedstawionej na początku tego rozdziału. Zajmiemy się tylko przypadkami (II) i (V), ponieważ łatwo zauważyć, że pozostałe przypadki: (II), (IV), (V), (VII) są analogiczne jak jeden z tych dwóch.

Zaczynamy od przypadku (II), który odpowiada drugiemu równaniu układu (3.2).

Twierdzenie 3.3
Niech $(X,+)$ *będzie grupą abelową,* Y *będzie przestrzenią Banacha nad ciałem* $\mathbb{K}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$*,* $A_1,\dots,A_7\in\mathbb{K}$*,* $D\subset X$*,* $0\in D$*,*

$$2x,-x\in D,\qquad x\in D.$$

Załóżmy, że $A_1+A_2+A_3\neq 0$*. Niech funkcja* $L\colon D^3\to[0,\infty)$ *spełnia warunek*

$$L(kx,ky,kz)\leqslant c(k)L(x,y,z),\qquad (x,y,z)\in D^3, k\in\{2,0,-1\} \tag{3.35}$$

z pewnymi takimi stałymi $c(2),c(0),c(-1)\in[0,\infty)$*, że*

$$b:=c(2)d(2)+c(0)d(0)+c(-1)d(-1)<1,$$

gdzie

$$d(2):=\left|\frac{A_5}{A_1+A_2+A_3}\right|,\ d(0):=\left|\frac{A_6+A_7}{A_1+A_2+A_3}\right|,\ d(-1):=\left|\frac{A_4}{A_1+A_2+A_3}\right|. \tag{3.36}$$

Załóżmy, że $f\colon D\to Y$ *jest taką funkcją, że*

$$\begin{aligned}\|A_1f(x+y+z)&+A_2f(x)+A_3f(y)+A_4f(z)\\&-A_5f(x+y)-A_6f(x+z)-A_7f(y+z)\|\leqslant L(x,y,z),\\&\qquad (x,y,z)\in D^3,\ x+y+z,x+y,x+z,y+z\in D.\end{aligned} \tag{3.37}$$

Wtedy istnieje taka jedyna funkcja $F:D\to Y$ *spełniająca (2), że*

$$\|f(x)-F(x)\|\leqslant\rho_L(x),\qquad x\in D, \tag{3.38}$$

gdzie

$$\rho_L(x):=\frac{L(x,x,-x)}{|A_1+A_2+A_3|(1-b)},\qquad x\in D. \tag{3.39}$$

Dowód. Podstawmy $x=y=t$, $z=-t$ w nierówności (3.37). Wówczas

$$\|(A_1+A_2+A_3)f(t)+A_4f(-t)-A_5f(2t)-(A_6+A_7)f(0)\|\leqslant L(t,t,-t),\qquad t\in D.$$

Zatem dla każdego $t\in D$

$$\begin{aligned}\Big\|f(t)&+\frac{A_4}{A_1+A_2+A_3}f(-t)-\frac{A_5}{A_1+A_2+A_3}f(2t)\\&-\frac{A_6+A_7}{A_1+A_2+A_3}f(0)\Big\|\leqslant\varepsilon(t):=\frac{L(t,t,-t)}{|A_1+A_2+A_3|}.\end{aligned} \tag{3.40}$$

Połóżmy

$$\mathcal{T}\xi(t):=\frac{A_5}{A_1+A_2+A_3}\xi(2t)+\frac{A_6+A_7}{A_1+A_2+A_3}\xi(0)-\frac{A_4}{A_1+A_2+A_3}\xi(-t) \tag{3.41}$$

dla $\xi\in Y^D$, $t\in D$. Łatwo zauważyć, że operator $\mathcal{T}$ jest liniowy. Ponato z (3.40) dostajemy, że

$$\|f(t)-\mathcal{T}f(t)\|\leqslant\varepsilon(t),\qquad t\in D.$$

Ustalmy $\xi, \mu \in Y^D$. Dla każdego $t \in D$ mamy

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{T}\xi(t) - \mathcal{T}\mu(t)\| &= \left\| \frac{A_5}{A_1+A_2+A_3}(\xi(2t)-\mu(2t)) + \frac{A_6+A_7}{A_1+A_2+A_3}(\xi(0)-\mu(0)) \right. \\
&\quad \left. - \frac{A_4}{A_1+A_2+A_3}(\xi(-t)-\mu(-t)) \right\| \\
&\leqslant \left| \frac{A_5}{A_1+A_2+A_3} \right| \|\xi(-2t)-\mu(-2t)\| + \left| \frac{A_6+A_7}{A_1+A_2+A_3} \right| \|\xi(0)-\mu(0)\| \\
&\quad + \left| \frac{A_4}{A_1+A_2+A_3} \right| \|\xi(-t)-\mu(-t)\|.
\end{aligned}$$

Wtedy

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{T}\xi(t) - \mathcal{T}\mu(t)\| &\leqslant d(2)\|\xi(2t)-\mu(2t)\| + d(0)\|\xi(0)-\mu(0)\| \\
&\quad + d(-1)\|\xi(-t)-\mu(-t)\|, \qquad t \in D. \qquad (3.42)
\end{aligned}$$

Pokazaliśmy zatem, że warunek (H2) w Twierdzeniu 1.1 jest spełniony z $k = 3$, $S = D$, $E = Y$,

$$f_1(t) = 2t, \qquad f_2(t) = 0, \qquad f_3(t) = -t,$$

$$l_1(t) = d(2), \qquad l_2(t) = d(0), \qquad l_3(t) = d(-1),$$

tzn.

$$\|\mathcal{T}\xi(t) - \mathcal{T}\mu(t)\| \leqslant \sum_{i=1}^{3} l_i(t)\|\xi(f_i(t)) - \mu(f_i(t))\|, \qquad \xi, \mu \in Y^D, t \in D.$$

Zdefiniujmy $\Lambda : \mathbb{R}_+{}^D \to \mathbb{R}_+{}^D$ wzorem

$$\Lambda\eta(t) := \sum_{i=1}^{3} l_i(t)\eta(f_i(t)), \qquad t \in D, \eta \in \mathbb{R}_+{}^D,$$

czyli

$$\Lambda\eta(t) = d(2)\eta(2t) + d(0)\eta(0) + d(-1)\eta(-t), \qquad t \in D, \eta \in \mathbb{R}_+{}^D.$$

Zauważmy, że operator Λ, tak jak $\mathcal{T}$, jest liniowy Pokażemy, że Λ jest niemalejący, tzn. dla wszystkich $\eta, \zeta \in \mathbb{R}_+{}^D$, jeśli $\eta \leqslant \zeta$, to $\Lambda\eta \leqslant \Lambda\zeta$. Weźmy dowolne takie funkcje $\eta, \zeta \in \mathbb{R}_+{}^D$, że $\eta \leqslant \zeta$. Z powyższej definicji i postaci Λ dla każdego $t \in D$ dostajemy

$$\begin{aligned}
\Lambda\eta(t) - \Lambda\zeta(t) &= b(2)\,\eta(2t) + b(0)\,\eta(0) - b(-1)\,\eta(-t) \\
&\quad - (b(2)\,\zeta(2t) + b(0)\,\zeta(0) - b(-1)\,\zeta(-t)) \\
&= b(2)\,(\eta(2t) - \zeta(2x)) + b(0)\,(\eta(0) - \zeta(0)) - b(-1)\,(\eta(-t) - \zeta(-t)) \leqslant 0,
\end{aligned}$$

ponieważ $b(2) \geqslant 0,\ b(0) \geqslant 0,\ b(-1) \geqslant 0$. Zatem

$$\Lambda\eta(t) \leqslant \Lambda\zeta(t), \qquad \eta, \zeta \in \mathbb{R}_+{}^D, t \in D.$$

Ponadto z (3.42)

$$\|\mathcal{T}\xi(t) - \mathcal{T}\mu(t)\| \leqslant \Lambda(\|\xi - \mu\|)(t), \qquad \xi, \mu \in Y^D, t \in D. \tag{3.43}$$

Teraz pokażemy, że $\varepsilon^*(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \Lambda^n \varepsilon(t) < \infty$ dla każdego $t \in D$, tzn. szereg funkcyjny $\sum_{n=0}^{\infty} \Lambda^n \varepsilon(t)$ jest zbieżny dla każdego $t \in D$. Ustalmy $t \in D$. Powołując się na (3.35) mamy

$$\begin{aligned}
\Lambda\varepsilon(t) &= d(2)\varepsilon(2t) + d(0)\varepsilon(0) + d(-1)\varepsilon(-t) \\
&= d(2)\frac{L(2t, 2t, -2t))}{|A_1 + A_2 + A_3|} + d(0)\frac{L(0,0,0)}{|A_1 + A_2 + A_3|} \\
&\quad + d(-1)\frac{L(-(t,t,-t))}{|A_1 + A_2 + A_3|} \\
&\leqslant d(2)c(2)\frac{L(t,t,-t)}{|A_1 + A_2 + A_3|} + d(0)c(0)\frac{L(t,t,-t)}{|A_1 + A_2 + A_3|} \\
&\quad + d(-1)c(-1)\frac{L(t,t,-t)}{|A_1 + A_2 + A_3|} \\
&= (d(2)c(2) + d(0)c(0) + d(-1)c(-1))\frac{L(t,t,-t)}{|A_1 + A_2 + A_3|}.
\end{aligned}$$

Stąd

$$\Lambda\varepsilon(t) \leqslant b\varepsilon(t), \qquad t \in D. \tag{3.44}$$

Indukcyjnie pokażemy, że monotoniczność i liniowość Λ implikują

$$\Lambda^n\varepsilon(t) \leqslant b^n\varepsilon(t), \qquad t \in D, n \in \mathbb{N}. \tag{3.45}$$

Dla $n = 1$ warunek (3.45) jest spełniony na mocy (3.44). Załóżmy, że (3.45) zachodzi dla dowolnego ustalonego $n \in \mathbb{N}$. Wtedy z założenia indukcyjnego otrzymujemy

$$\Lambda^{n+1}\varepsilon(t) \;\;=\;\; \Lambda(\Lambda^n\varepsilon)(t) \leqslant \Lambda(b^n\varepsilon)(t), \qquad t \in D, n \in \mathbb{N},$$

ponieważ Λ jest niemalejący. Następnie korzystając z liniowości Λ oraz (3.44) dostajemy

$$\Lambda^{n+1}\varepsilon(t) \;\;\leqslant\;\; \Lambda(b^n\varepsilon)(t) = b^n(\Lambda\varepsilon)(t) \leqslant b^{n+1}\varepsilon(t), \qquad t \in D, n \in \mathbb{N},$$

co kończy dowód warunku (3.45).

W konsekwencji dla każdego $t \in D$ uzyskujemy następujące oszacowanie:

$$\varepsilon^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Lambda^n\varepsilon(t) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} b^n\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon(t)}{1-b} = \frac{L(t,t,-t)}{|A_1 + A_2 + A_3|(1-b)}.$$

Pokazaliśmy zatem, że założenia Twierdzenia 1.1 są spełnione. Z Twierdzenia 1.1 (z $S = D$ i $E = Y$) istnieje taka funkcja $F\colon D \to Y$, że

$$\begin{aligned}
F(t) &= \frac{A_5}{A_1 + A_2 + A_3}F(2t) + \frac{A_6 + A_7}{A_1 + A_2 + A_3}F(0) \\
&\quad - \frac{A_4}{A_1 + A_2 + A_3}F(-t), \qquad t \in D,
\end{aligned} \tag{3.46}$$

oraz

$$\|f(t) - F(t)\| \leqslant \varepsilon^*(t) \leqslant \frac{L(t,t,-t)}{|A_1 + A_2 + A_3|(1-b)}, \qquad t \in D. \tag{3.47}$$

Ponadto

$$F(t) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{T}^n f(t), \qquad t \in D.$$

Następnie indukcyjnie pokażemy, że dla $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ zachodzi warunek

$$\begin{aligned} &\|A_1\mathcal{T}^n\ f(x+y+z) + A_2\mathcal{T}^n f(x) + A_3\mathcal{T}^n f(y) + A_4\mathcal{T}^n f(z) \\ &\quad - A_5\mathcal{T}^n f(x+y) - A_6\mathcal{T}^n f(x+z) - A_7\mathcal{T}^n f(y+z)\| \leqslant b^n\ L(x,y,z) \\ &\qquad (x,y,z) \in D^3,\ x+y+z, x+y, x+z, y+z \in D. \end{aligned} \tag{3.48}$$

Dla $n = 0$ warunek (3.48) jest równoznaczny z (3.37). Następnie załóżmy, że (3.48) zachodzi dla ustalonego $n \in \mathbb{N}_0$. Wtedy dla każdego $(x,y,z) \in D^3,\ x+y+z, x+y, x+z, y+z \in D$ mamy

$$\begin{aligned} &\Big\|A_1\mathcal{T}^{n+1} f(x+y+z) + A_2\mathcal{T}^{n+1} f(x) + A_3\mathcal{T}^{n+1} f(y) + A_4\mathcal{T}^{n+1} f(z) \\ &\quad - A_5\mathcal{T}^{n+1} f(x+y) - A_6\mathcal{T}^{n+1} f(x+z) - A_7\mathcal{T}^{n+1} f(y+z)\Big\| \\ = \quad &\Big\|\frac{A_5}{A_1+A_2+A_3} A_1\mathcal{T}^n f(2(x+y+z)) + \frac{A_6+A_7}{A_1+A_2+A_3} A_1\mathcal{T}^n f(0)) \\ &\quad - \frac{A_4}{A_1+A_2+A_3} A_1\mathcal{T}^n f(-(x+y+z)) \\ &\quad + \frac{A_5}{A_1+A_2+A_3} A_2\mathcal{T}^n f(2x) + \frac{A_6+A_7}{A_1+A_2+A_3} A_2\mathcal{T}^n f(0) \\ &\quad - \frac{A_3}{A_1+A_2+A_3} A_2\mathcal{T}^n f(-x) \\ &\quad + \frac{A_5}{A_1+A_2+A_3} A_3\mathcal{T}^n f(2y) + \frac{A_6+A_7}{A_1+A_2+A_3} A_3\mathcal{T}^n f(0) \\ &\quad - \frac{A_4}{A_1+A_2+A_3} A_3\mathcal{T}^n f(-y) \\ &\quad + \frac{A_5}{A_1+A_2+A_3} A_4\mathcal{T}^n f(2z) + \frac{A_6+A_7}{A_1+A_2+A_3} A_4\mathcal{T}^n f(0) \\ &\quad - \frac{A_4}{A_1+A_2+A_3} A_4\mathcal{T}^n f(-z) \\ &\quad - \frac{A_5}{A_1+A_2+A_3} A_5\mathcal{T}^n f(2(x+y)) - \frac{A_6+A_7}{A_1+A_2+A_3} A_5\mathcal{T}^n f(0) \\ &\quad + \frac{A_4}{A_1+A_2+A_3} A_5\mathcal{T}^n f(-1(x+y)) \\ &\quad - \frac{A_5}{A_1+A_2+A_3} A_6\mathcal{T}^n f(2(x+z)) - \frac{A_6+A_7}{A_1+A_2+A_3} A_6\mathcal{T}^n f(0) \\ &\quad + \frac{A_4}{A_1+A_2+A_3} A_6\mathcal{T}^n f(-1(x+z)) \\ &\quad - \frac{A_5}{A_1+A_2+A_3} A_7\mathcal{T}^n f(2(y+z)) - \frac{A_6+A_7}{A_1+A_2+A_3} A_7\mathcal{T}^f (0) \\ &\quad + \frac{A_4}{A_1+A_2+A_3} A_7\mathcal{T}^n f(-1(y+z))\Big\| \end{aligned}$$

i wobec tego

$$\begin{aligned}
&\Big\|A_1\mathcal{T}^{n+1}f(x+y+z)+A_2\mathcal{T}^{n+1}f(x)+A_3\mathcal{T}^{n+1}f(y)+A_4\mathcal{T}^{n+1}f(z)\\
&\qquad -A_5\mathcal{T}^{n+1}f(x+y)-A_6\mathcal{T}^{n+1}f(x+z)-A_7\mathcal{T}^{n+1}f(y+z)\Big\|\\
&\leqslant \left|\frac{A_5}{A_1+A_2+A_3}\right| b^nL(2x,2y,2z)+\left|\frac{A_6+A_7}{A_1+A_2+A_3}\right| b^nL(0,0,0)\\
&\quad +\left|\frac{A_4}{A_1+A_2+A_3}\right| b^nL(-x,-y,-z)\\
&\leqslant b^n(d(2)c(2)+d(0)c(0)+d(-1)c(-1))L(x,y,z)\\
&= b^{n+1}L(x,y,z).
\end{aligned}$$

Stąd, na mocy indukcji otrzymujemy, że zachodzi warunek (3.48). Biorąc $n\to\infty$ w (3.48) dostajemy

$$\begin{aligned}
A_1F(x+y+z)+A_2F(x)+A_3F(y)+A_4F(z)&=A_5F(x+y)+A_6F(x+z)\\
+A_7F(y+z),\qquad (x,y,z)\in D^3,\ x+y+z,x+y,x+z,y+z\in D. \quad (3.49)
\end{aligned}$$

Zatem udowodniliśmy, że istnieje funkcja $F:D\to Y$ spełniająca (2) dla wszystkich $x,y,z\in D$ takich, że $x+y+z,x+y,x+z,y+z\in D$, oraz zachodzi następujące oszacowanie

$$\|f(x)-F(x)\|\leqslant \varepsilon^*(x)\leqslant \rho_L(x),\qquad x\in D. \quad (3.50)$$

Pozostaje jeszcze do udowodnienia, że funkcja F jest jedynym rozwiązaniem równania (2). Żeby to otrzymać, najpierw pokażemy indukcyjnie, że dla każdego $n\in\mathbb{N}_0$ zachodzi

$$\|\mathcal{T}^n\xi(x)-\mathcal{T}^n\mu(x)\|\leqslant \Lambda^n(\|\xi-\mu\|)(x),\qquad \xi,\mu\in Y^D, x\in D. \quad (3.51)$$

Dla $n=0$ warunek (3.51) jest oczywisty. Załóżmy więc, że dla pewnego ustalonego $n\in\mathbb{N}_0$ relacja (3.51) zachodzi. Wtedy z (3.43)

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{T}^{n+1}\xi(x)-\mathcal{T}^{n+1}\mu(x)\|&=\|\mathcal{T}(\mathcal{T}^n\xi)(x)-\mathcal{T}(\mathcal{T}^n\mu)(x)\|\\
&\leqslant \Lambda(\|\mathcal{T}^n\xi-\mathcal{T}^n\mu\|)(x),\qquad x\in D.
\end{aligned}$$

Stąd z założenia indukcyjnego i monotoniczności Λ otrzymujemy

$$\|\mathcal{T}^{n+1}\xi(x)-\mathcal{T}^{n+1}\mu(x)\|\leqslant \Lambda(\Lambda^n(\|\xi-\mu\|))(x)=\Lambda^{n+1}(\|\xi-\mu\|)(x),\qquad x\in D.$$

Niech $G:D\to Y$ też będzie takim rozwiązaniem równania (2), że $\|f(x)-G(x)\|\leqslant \rho_L(x)$ dla $x\in D$. Wówczas

$$\|G(x)-F(x)\|\leqslant 2\rho_L(x),\qquad x\in D. \quad (3.52)$$

Stąd z (3.51) otrzymujemy

$$\|\mathcal{T}^nG(x)-\mathcal{T}^nF(x)\|\leqslant 2\Lambda^n\rho_L(x)\leqslant \frac{2\Lambda^n\varepsilon(x)}{1-b},\qquad x\in D,$$

ponieważ Λ jest liniowy i niemalejący. Biorąc $n \to \infty$, ze zbieżności szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} \Lambda^n \varepsilon(x)$, dostajemy

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathcal{T}^n G(x) - \mathcal{T}^n F(x)\| = 0, \qquad x \in D.$$

Stąd $\|G(x) - F(x)\| = 0$ dla $x \in D$, ponieważ G i F są stałymi punktami operatora $\mathcal{T}$. W konsekwencji $G(x) = F(x)$ dla każdego $x \in D$. ■

Zauważmy, że jeśli $L(0,0,0) \neq 0$, to z (3.35) dostajemy, że $c(0) \geqslant 1$. Jeśli natomiast $L(0,0,0) = 0$, to bez straty ogólności możemy położyć $c(0) = 0$ i wtedy stała b występująca w (3.39) jest postaci

$$b = c(2)d(2) + c(-1)d(-1), \tag{3.53}$$

gdzie $d(2)$ i $d(-1)$ są dane w (3.36). Zatem jeśli dodatkowo $A_4 = A_5 = 0$, to $d(2) = d(-1) = 0$. Stąd $b = 0$, a w konsekwencji (w dowodzie Twierdzenia 3.3) $\varepsilon^*(x) = \varepsilon(x)$ dla $x \in D$. Wniosek z powyższych rozważań jest następujący.

Wniosek 3.1
Niech $(X,+)$ będzie grupą abelową, Y będzie przestrzenią Banacha nad ciałem $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $A_1, \ldots, A_7 \in \mathbb{K}$, $D \subset X$, $0 \in D$,

$$2x, -x \in D, \qquad x \in D.$$

Ponadto niech $A_1 + A_2 + A_3 \neq 0$, $A_4 = A_5 = 0$ i funkcja $L\colon D^3 \to [0,\infty)$ spełnia warunki:

$$L(0,0,0) = 0, \qquad L(kx,ky,kz) \leqslant c(k)L(x,y,z), \qquad (x,y,z) \in D^3, k \in \{2,-1\},$$

z pewnymi stałymi $c(2), c(-1) \in [0,\infty)$.

Załóżmy, że $f\colon D \to Y$ jest funkcją taką, że warunek (3.37) *jest spełniony. Wtedy istnieje taka jedyna funkcja $F : D \to Y$ spełniająca* (3.13)*, że*

$$\|f(x) - F(x)\| \leqslant \rho_L(x), \qquad x \in D,$$

gdzie

$$\rho_L(x) := \frac{L(x,x,-x)}{|A_1 + A_2 + A_3|}, \qquad x \in D.$$

Ponadto F jest funkcją stałą daną wzorem

$$F(x) = \frac{A_6 + A_7}{A_1 + A_2 + A_3} f(0), \qquad x \in D. \tag{3.54}$$

Dowód. Wystarczy rozumować analogiczne jak w dowodzie Twierdzenia 3.3. W szczególności, z (3.41) na podstawie założenia o współczynnikach A_i dostajemy, że

$$\mathcal{T}\xi(t) = \frac{A_6 + A_7}{A_1 + A_2 + A_3}\xi(0), \qquad \xi \in Y^X, t \in X.$$

Ponadto z (3.46) mamy

$$F(t) = \frac{A_6 + A_7}{A_1 + A_2 + A_3} F(0), \qquad t \in X. \tag{3.55}$$

Z (3.36) i (3.53) otrzymujemy, że $b = 0$. Zatem z (3.45)

$$\Lambda^n \varepsilon(t) = 0, \qquad t \in X, n \in \mathbb{N},$$

gdzie

$$\varepsilon(t) = \frac{L(t,t,-t)}{|A_1 + A_2 + A_3|}, \qquad t \in X.$$

Z (3.47) mamy $F(0) = f(0)$, ponieważ $L(0,0,0) = 0$. Stąd z (3.55) dostajemy (3.54). ■

Rozważmy teraz przypadek (V).

Twierdzenie 3.4
Niech $(X, +)$ *będzie przemiennym monoidem,* $D \subset X$, $0 \in D$,

$$2x \in D, \qquad x \in D,$$

Y *będzie przestrzenią Banacha nad ciałem* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ *oraz* $A_1, \ldots, A_7 \in \mathbb{K}$. *Załóżmy, że* $-A_2 - A_3 + A_6 + A_7 \neq 0$. *Niech funkcja* $L\colon D^3 \to [0, \infty)$ *spełnia warunek*

$$L(kx, ky, kz) \leqslant c(k) L(x,y,z), \qquad (x,y,z) \in D^3, k \in \{0, 2\}, \tag{3.56}$$

z pewnymi takimi stałymi $c(2), c(0) \in [0, \infty)$, *że* $b := c(2)d(2) + c(0)d(0) < 1$, *gdzie*

$$d(2) := \left| \frac{A_1 - A_5}{A_6 + A_7 - A_2 - A_3} \right|, \qquad d(0) := \left| \frac{A_4}{A_6 + A_7 - A_2 - A_3} \right|. \tag{3.57}$$

Załóżmy, że $f\colon D \to Y$ *jest funkcją spełniającą warunek* (3.37). *Wtedy istnieje jedyna funkcja* $F : D \to Y$ *spełniająca* (3.13) *taka, że warunek* (3.38) *zachodzi dla*

$$\rho_L(x) := \frac{L(x,x,0)}{|A_6 + A_7 - A_2 - A_3|(1-b)}, \qquad x \in D. \tag{3.58}$$

Dowód. Podstawiając $x = t$, $y = t$, $z = 0$ w nierówności (3.37) otrzymujemy

$$\|(A_6 + A_7 - A_2 - A_3) f(t) - (A_1 - A_5) f(2t) + A_4 f(0)\| \leqslant L(t,t,0), \qquad t \in D.$$

Zatem dla każdego $t \in D$

$$\left\| f(t) - \frac{A_1 - A_5}{A_6 + A_7 - A_2 - A_3} f(2t) - \frac{A_4}{A_6 + A_7 - A_2 - A_3} f(0) \right\| \leqslant \varepsilon(t), \tag{3.59}$$

gdzie $\varepsilon(t) := \frac{L(t,t,0)}{|A_6 + A_7 - A_2 - A_3|}$. Połóżmy

$$\mathcal{T}\xi(t) := \frac{A_1 - A_5}{A_6 + A_7 - A_2 - A_3} \xi(2t) + \frac{A_4}{A_6 + A_7 - A_2 - A_3} \xi(0) \tag{3.60}$$

dla $\xi \in Y^D$ oraz $t \in D$.

Zauważmy, że operator $\mathcal{T}$ jest liniowy. Następnie z (3.59) dostajemy, że

$$\|f(t) - \mathcal{T}f(t)\| \leqslant \varepsilon(t), \qquad t \in D.$$

Ustalmy $\xi, \mu \in Y^D$. Dla każdego $t \in D$ mamy

$$\begin{aligned}\|\mathcal{T}\xi(t) - \mathcal{T}\mu(t)\| &= \Bigg\| \frac{A_1 - A_5}{A_6 + A_7 - A_2 - A_3}(\xi(2t) - \mu(2t)) \\ &\quad + \frac{A_4}{A_6 + A_7 - A_2 - A_3}(\xi(0) - \mu(0)) \Bigg\| \\ &\leqslant \left| \frac{A_1 - A_5}{A_6 + A_7 - A_2 - A_3} \right| \|\xi(2t) - \mu(2t)\| + \left| \frac{A_4}{A_6 + A_7 - A_2 - A_3} \right| \|\xi(0) - \mu(0)\|.\end{aligned}$$

Stąd

$$\|\mathcal{T}\xi(t) - \mathcal{T}\mu(t)\| \leqslant d(2)\|\xi(2t) - \mu(2t)\| + d(0)\|\xi(0) - \mu(0)\|, \qquad t \in D. \tag{3.61}$$

Zatem pokazaliśmy, że warunek (H2) występujący w Twierdzeniu 1.1 jest spełniony z $k = 2$, $S = D$, $E = Y$,

$$f_1(t) = 2t, \qquad f_2(t) = 0, \qquad l_1(t) = d(2), \qquad l_2(t) = d(0), \qquad t \in D,$$

tzn.

$$\|\mathcal{T}\xi(t) - \mathcal{T}\mu(t)\| \leqslant \sum_{i=1}^{2} l_i(t)\|\xi(f_i(t)) - \mu(f_i(t))\|, \qquad \xi, \mu \in Y^D, t \in D.$$

Zdefiniujmy operator $\Lambda : {\mathbb{R}_+}^D \to {\mathbb{R}_+}^D$ jako

$$\Lambda\eta(t) := \sum_{i=1}^{2} l_i(t)\eta(f_i(t)), \qquad t \in D, \eta \in {\mathbb{R}_+}^D.$$

Wtedy dla każdego $\eta \in {\mathbb{R}_+}^D$ mamy

$$\Lambda\eta(t) := d(2)\eta(2t) + d(0)\eta(0), \qquad t \in D.$$

Zauważmy, że Λ też jest liniowy. Pokażemy, że Λ jest niemalejący. Weźmy dowolne takie funkcje $\eta, \zeta \in {\mathbb{R}_+}^D$, że $\eta \leqslant \zeta$. Wtedy, dla każdego $t \in D$ dostajemy

$$\begin{aligned}\Lambda\eta(x) - \Lambda\zeta(x) &= b(2)\,\eta(2t) + b(0)\,\eta(0) - (b(2)\,\zeta(2t) + b(0)\,\zeta(0)) \\ &= b(2)\,(\eta(2t) - \zeta(2t)) + b(0)\,(\eta(0) - \zeta(0)) \leqslant 0,\end{aligned}$$

ponieważ $b(2) \geqslant 0,\ b(0) \geqslant 0$. Zatem

$$\Lambda\eta(t) \leqslant \Lambda\zeta(t), \qquad t \in D.$$

Ponadto z (3.61) mamy, że

$$\|\mathcal{T}\xi(t) - \mathcal{T}\mu(t)\| \leqslant \Lambda(\|\xi - \mu\|)(t), \qquad \xi, \mu \in Y^D, t \in D. \tag{3.62}$$

Następnie pokażemy, że $\varepsilon^*(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \Lambda^n \varepsilon(t) < \infty$ dla każdego $t \in D$. Ustalmy więc $t \in D$. Powołując się na warunek (3.56), mamy

$$\begin{aligned}
\Lambda\varepsilon(t) &= d(2)\varepsilon(2t) + d(0)\varepsilon(0) \\
&= d(2)\frac{L(2t,2t,0)}{|A_6+A_7-A_2-A_3|} + d(0)\frac{L(0,0,0)}{|A_6+A_7-A_2-A_3|} \\
&\leqslant d(2)c(2)\frac{L(t,t,0)}{|A_6+A_7-A_2-A_3|} + d(0)c(0)\frac{L(t,t,0)}{|A_6+A_7-A_2-A_3|} \\
&= (d(2)c(2)+d(0)c(0))\frac{L(t,t,0)}{|A_6+A_7-A_2-A_3|}.
\end{aligned}$$

Zatem

$$\Lambda\varepsilon(t) \leqslant b\varepsilon(t), \qquad t \in D. \tag{3.63}$$

Indukcyjnie pokażemy, że monotoniczność i liniowość Λ implikują

$$\Lambda^n\varepsilon(t) \leqslant b^n\varepsilon(t), \qquad t \in D. \tag{3.64}$$

Dla $n = 0$ warunek (3.64) jest oczywisty. Załóżmy zatem, że (3.64) zachodzi dla ustalonego $n \in \mathbb{N}$. Wtedy dla każdego $t \in D$ mamy

$$\Lambda^{n+1}\varepsilon(t) = \Lambda(\Lambda^n\varepsilon)(t) \leqslant \Lambda(b^n\varepsilon)(t) = b^n\Lambda\varepsilon(t) \leqslant b^{n+1}\varepsilon(t).$$

Zatem z (3.64) dla każdego $t \in D$ otrzymujemy:

$$\varepsilon^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\Lambda^n\varepsilon(t) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} b^n\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon(t)}{1-b} = \frac{L(t,t,0)}{|A_6+A_7-A_2-A_3|(1-b)}.$$

W ten sposób pokazaliśmy, że założenia Twierdzenia 1.1 są spełnione (z $S = D$ i $E = Y$) i wobec tego istnieje funkcja $F\colon D \to Y$ taka, że

$$F(t) = \frac{A_1-A_5}{A_6+A_7-A_2-A_3}F(2t) + \frac{A_4}{A_6+A_7-A_2-A_3}F(0), \qquad t \in D,$$

oraz

$$\|f(t)-F(t)\| \leqslant \varepsilon^*(t) \leqslant \frac{L(t,t,0)}{|A_6+A_7-A_2-A_3|(1-b)}, \qquad t \in D.$$

Ponadto

$$F(t) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{T}^n f(t), \qquad t \in D.$$

Następnie indukcyjnie pokażemy, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ mamy

$$\begin{aligned}
&\|A_1\mathcal{T}^n f(x+y+z) + A_2\mathcal{T}^n f(x) + A_3\mathcal{T}^n f(y) + A_4\mathcal{T}^n f(z) \\
&\quad - A_5\mathcal{T}^n f(x+y) - A_6\mathcal{T}^n f(x+z) - A_7\mathcal{T}^n f(y+z)\| \\
&\leqslant b^n L(x,y,z), \qquad (x,y,z) \in D^3, x+y+z, x+y, x+z, y+z \in D.
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Dla $n=0$ warunek (3.65) jest równoznaczy z (3.37). Załóżmy więc, że (3.65) zachodzi dla ustalonego $n \in \mathbb{N}_0$. Wtedy mamy

$$\begin{aligned}
&\Big\|A_1\mathcal{T}^{n+1}f(x+y+z)+A_2\mathcal{T}^{n+1}f(x)+A_3\mathcal{T}^{n+1}f(y)+A_4\mathcal{T}^{n+1}f(z)\\
&\qquad -A_5\mathcal{T}^{n+1}f(x+y)-A_6\mathcal{T}^{n+1}f(x+z)-A_7\mathcal{T}^{n+1}f(y+z)\Big\|\\
&= \Big\|\frac{A_1-A_5}{A_6+A_7-A_2-A_3}A_1\mathcal{T}^n f(2(x+y+z))+\frac{A_4}{A_6+A_7-A_2-A_3}A_1\mathcal{T}^n f(0)\\
&\quad +\frac{A_1-A_5}{A_6+A_7-A_2-A_3}A_2\mathcal{T}^n f(2x)+\frac{A_4}{A_6+A_7-A_2-A_3}A_2\mathcal{T}^n f(0)\\
&\quad +\frac{A_1-A_5}{A_6+A_7-A_2-A_3}A_3\mathcal{T}^n f(2y)+\frac{A_4}{A_6+A_7-A_2-A_3}A_3\mathcal{T}^n f(0)\\
&\quad +\frac{A_1-A_5}{A_6+A_7-A_2-A_3}A_4\mathcal{T}^n f(2z)+\frac{A_4}{A_6+A_7-A_2-A_3}A_4\mathcal{T}^n f(0)\\
&\quad -\frac{A_1-A_5}{A_6+A_7-A_2-A_3}A_5\mathcal{T}^n f(2(x+y))-\frac{A_4}{A_6+A_7-A_2-A_3}A_5\mathcal{T}^n f(0)\\
&\quad -\frac{A_1-A_5}{A_6+A_7-A_2-A_3}A_6\mathcal{T}^n f(2(x+z))-\frac{A_4}{A_6+A_7-A_2-A_3}A_6\mathcal{T}^n f(0)\\
&\quad -\frac{A_1-A_5}{A_6+A_7-A_2-A_3}A_7\mathcal{T}^n f(2(y+z))-\frac{A_4}{A_6+A_7-A_2-A_3}A_7\mathcal{T}^n f(0)\Big\|\\
&\leqslant \left|\frac{A_1-A_5}{A_6+A_7-A_2-A_3}\right| b^n L(2x,2y,2z)+\left|\frac{A_4}{A_6+A_7-A_2-A_3}\right| b^n L\big(0,0,0\big)\\
&\leqslant (d(2)c(2)+d(0)c(0))L(x,y,z)\\
&= b^{n+1}L(x,y,z), \qquad (x,y,z)\in D^3,\ x+y+z, x+y, x+z, y+z\in D.
\end{aligned}$$

Zatem wykazaliśmy warunek (3.65). Biorąc $n\to\infty$ w (3.65) dostajemy, że

$$\begin{aligned}
A_1F(x+y+z)+A_2F(x)+A_3F(y)+A_4F(z) &= A_5F(x+y)+A_6F(x+z) \qquad (3.66)\\
+A_7F(y+z), \qquad (x,y,z)\in D^3,&\ x+y+z, x+y, x+z, y+z\in D.
\end{aligned}$$

Dowiedliśmy zatem, że istnieje taka funkcja $F : D \to Y$ spełniająca równanie (3.13), że

$$\|f(x)-F(x)\| \leqslant \varepsilon^*(x) \leqslant \rho_L(x), \qquad x\in D. \tag{3.67}$$

Pozostaje jeszcze do udowodnienia, że ta funkcja F jest jedyna. Żeby to otrzymać, najpierw pokażemy indukcyjnie, że dla wszystkich $n \in \mathbb{N}_0$ zachodzi

$$\|\mathcal{T}^n\xi(x)-\mathcal{T}^n\mu(x)\| \leqslant \Lambda^n(\|\xi-\mu\|)(x), \qquad \xi,\mu\in Y^D, x\in D. \tag{3.68}$$

Dla $n=0$ warunek (3.68) jest oczywisty. Załóżmy więc, że dla pewnego $n \in \mathbb{N}_0$ relacja (3.68) zachodzi. Wtedy z (3.62)

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{T}^{n+1}\xi(x)-\mathcal{T}^{n+1}\mu(x)\| &= \|\mathcal{T}(\mathcal{T}^n\xi)(x)-\mathcal{T}(\mathcal{T}^n\mu)(x)\|\\
&\leqslant \Lambda(\|\mathcal{T}^n\xi-\mathcal{T}^n\mu\|)(x), \qquad x\in D.
\end{aligned}$$

Stąd z założenia indukcyjnego i monotoniczności Λ otrzymujemy

$$\|\mathcal{T}^{n+1}\xi(x)-\mathcal{T}^{n+1}\mu(x)\| \leqslant \Lambda(\Lambda^n(\|\xi-\mu\|))(x) = \Lambda^{n+1}(\|\xi-\mu\|)(x), \qquad x\in D.$$

Niech $G : D \to Y$ także będzie takim rozwiązaniem równania (3.13), że zachodzi nierówność $\|f(x) - G(x)\| \leqslant \rho_L(x)$ dla $x \in D$. Wtedy

$$\|G(x) - F(x)\| \leqslant 2\rho_L(x), \qquad x \in D. \tag{3.69}$$

Zatem z (3.68) otrzymujemy

$$\|\mathcal{T}^n G(x) - \mathcal{T}^n F(x)\| \leqslant 2\Lambda^n \rho_L(x) \leqslant \frac{2\Lambda^n \varepsilon(x)}{1-b}, \qquad x \in D,$$

ponieważ Λ jest liniowy i niemalejący. Biorąc $n \to \infty$, ze zbieżności szeregu funkcyjnego $\sum_{n=0}^{\infty} \Lambda^n \varepsilon(x)$ dostajemy

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathcal{T}^n G(x) - \mathcal{T}^n F(x)\| = 0, \qquad x \in D.$$

Stąd $\|G(x) - F(x)\| = 0$ dla $x \in D$, ponieważ G i F są stałymi punktami operatora $\mathcal{T}$. W konsekwencji $G(x) = F(x)$ dla każdego $x \in D$, co kończy dowód. ■

Podobnie jak wcześniej, zauważmy, że jeśli $L(0,0,0) \neq 0$, to z (3.56) dostajemy, że $c(0) \geqslant 1$. A w przypadku, gdy $L(0,0,0) = 0$ bez straty ogólności możemy wziąć $c(0) = 0$. Wtedy stała b występująca w (3.58) jest postaci

$$b = c(2)d(2), \tag{3.70}$$

gdzie $d(2)$ jest dana jako (3.57). Jeśli $A_1 = A_5$, to $b = 0$, a w konsekwencji $\varepsilon^*(x) = \varepsilon(x)$. Wobec tego, robiąc stosowne modyfikacje w dowodzie Twierdzenia 3.4 (por. dowód Wniosku 3.1), otrzymujemy następujący wniosek.

Wniosek 3.2
Niech $(X, +)$ będzie a przemiennym monoidem, $D \subset X$, $0 \in D$, $2x \in D$ dla $x \in D$, Y będzie przestrzenią Banacha nad ciałem $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ oraz $A_1, \ldots, A_7 \in \mathbb{K}$. Załóżmy, że $A_6 + A_7 - A_2 - A_3 \neq 0$ i $A_1 = A_5$. Niech funkcja $L\colon D^3 \to [0,\infty)$ spełnia warunki $L(0,0,0) = 0$ oraz

$$L(kx, ky, kz) \leqslant c(2)L(x,y,z), \qquad (x,y,z) \in D^3,$$

ze stałą $c(2) \in [0,\infty)$.

Załóżmy, że funkcja $f\colon D \to Y$ spełnia warunek (3.37). Wtedy istnieje taka jedyna funkcja $F : D \to Y$ spełniająca (3.13), że warunek (3.38) zachodzi dla

$$\rho_L(x) := \frac{L(x,x,0)}{|A_6 + A_7 - A_2 - A_3|}, \qquad x \in D.$$

Ponadto F jest funkcją stałą daną wzorem

$$F(x) = \frac{A_4}{A_6 + A_7 - A_2 - A_3} f(0), \qquad x \in D. \tag{3.71}$$

3.3 Przypadek z parametrem

W tym podrozdziale udowodnimy wyniki dotyczące stabilności oraz hiperstabilności uogólnionego równania funkcyjnego Frécheta postaci (2) opublikowane w [42] w nieco odmiennej wersji. Jako wniosek z głównego wyniku otrzymamy pewne nowe nierówności charakteryzujące przestrzenie unitarne.

Główne twierdzenie tego podrozdziału dotyczące stabilności rozważanego równania przedstawiamy poniżej.

Twierdzenie 3.5
Niech $(X,+)$ będzie grupą przemienną, Y przestrzenią Banacha nad ciałem $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $A_1, \ldots, A_7 \in \mathbb{K}$, $A_1 \neq 0$. Załóżmy, że $f\colon X \to Y$, $c : \mathbb{Z} \to [0,\infty)$ oraz $L\colon X^3 \to [0,\infty)$ spełniają następujące trzy warunki:

$$\begin{aligned}\mathcal{M} := \{m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} :& |A_7|c(-2m) + |A_5 + A_6|c(m+1) + |A_3 + A_4|c(-m)\\ &+|A_2|c(2m+1) < |A_1|\} \neq \emptyset,\end{aligned} \tag{3.72}$$

$$L(kx, ky, kz) \leqslant c(k)L(x,y,z), \qquad \begin{aligned}&(x,y,z) \in X^3, m \in \mathcal{M},\\ &k \in \{-2m, m+1, -m, 2m+1\},\end{aligned} \tag{3.73}$$

$$\begin{aligned}\|A_1 f(x+y+z) &+ A_2 f(x) + A_3 f(y) + A_4 f(z) - A_5 f(x+y) - A_6 f(x+z)\\ &- A_7 f(y+z)\| \leqslant L(x,y,z), \qquad (x,y,z) \in X^3.\end{aligned} \tag{3.74}$$

Wtedy istnieje jedyna funkcja $F : X \to Y$ spełniająca (2) dla wszystkich $x, y, z \in X$ taka, że

$$\|f(x) - F(x)\| \leqslant \rho_L(x), \qquad x \in X, \tag{3.75}$$

gdzie

$$\rho_L(x) := \inf_{m\in\mathcal{M}} \frac{L((2m+1)x, -mx, -mx)}{|A_1| - \beta_m}, \tag{3.76}$$

z

$$\beta_m := |A_7|c(-2m) + |A_5 + A_6|c(m+1) + |A_3 + A_4|c(-m) + |A_2|c(2m+1).$$

Dowód. Najpierw rozważymy przypadek, gdy $A_1 = 1$. Wtedy równanie (2) przyjmuje postać

$$\begin{aligned}f(x+y+z) &+ A_2 f(x) + A_3 f(y) + A_4 f(z)\\ &= A_5 f(x+y) + A_6 f(x+z) + A_7 f(y+z).\end{aligned} \tag{3.77}$$

Wstawiając $(2m+1)x$ w miejsce x i biorąc $y = z = -mx$ w (3.74) otrzymujemy

$$\begin{aligned}\|f(x) &+ A_2 f((2m+1)x) + (A_3 + A_4) f(-mx)\\ &- (A_5 + A_6) f((m+1)x) - A_7 f(-2mx)\|\\ &\leqslant L((2m+1)x, -mx, -mx) =: \varepsilon_m(x), \qquad x \in X, m \in \mathbb{Z}.\end{aligned} \tag{3.78}$$

Następnie połóżmy

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_m\xi(x) :=\ & A_7\xi(-2mx) + (A_5 + A_6)\xi((m+1)x)\\ & - (A_3 + A_4)\xi(-mx) - A_2\xi((2m+1)x), \qquad \xi \in Y^X, x \in X,\ m \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Nierówność (3.78) może być zapisana w postaci

$$\|\mathcal{T}_m f(x) - f(x)\| \leqslant \varepsilon_m(x), \qquad x \in X, m \in \mathbb{Z}.$$

Zdefiniujmy operator $\Lambda_m : {\mathbb{R}_+}^X \to {\mathbb{R}_+}^X$ dla $m \in \mathbb{Z}$ wzorem

$$\begin{aligned}\Lambda_m\eta(x) :=\ & |A_7|\eta(-2mx) + |A_5 + A_6|\eta((m+1)x)\\ & + |A_3 + A_4|\eta(-mx) + |A_2|\eta((2m+1)x)\end{aligned}$$

dla $\eta \in {\mathbb{R}_+}^X$, $x \in X$. Zauważmy, że dla dowolnego $m \in \mathbb{Z}$, operator $\Lambda := \Lambda_m$ ma postać opisaną w (H3) z $t = 4$, $S = X$, $E = Y$ oraz

$$f_1(x) = -2mx, \qquad f_2(x) = (m+1)x,$$

$$\begin{aligned}f_3(x) &= -mx, \qquad f_4(x) = (2m+1)x,\\ L_1(x) &= |A_7|, \qquad L_2(x) = |A_5 + A_6|,\\ L_3(x) &= |A_3 + A_4|, \qquad L_4(x) = |A_2|\end{aligned}$$

dla $x \in X$. Ponadto z definicji operatora Λ_m wynika, że jest on liniowy i niemalejący.

Ustalmy dowolne $\xi, \mu \in Y^X$, $x \in X$, $m \in \mathbb{Z}$. Wtedy

$$\begin{aligned}\|\mathcal{T}_m\xi(x)\ &- \mathcal{T}_m\mu(x)\|\\ &= \|A_7\xi(-2mx) + (A_5 + A_6)\xi((m+1)x) - (A_3 + A_4)\xi(-mx)\\ &\quad - A_2\xi((2m+1)x) - A_7\mu(-2mx) - (A_5 + A_6)\mu((m+1)x)\\ &\quad + (A_3 + A_4)\mu(-mx) + A_2\mu((2m+1)x)\|\\ &\leqslant |A_7|\ \|(\xi - \mu)(-2mx)\| + |A_5 + A_6|\ \|(\xi - \mu)((m+1)x)\|\\ &\quad + |A_3 + A_4|\ \|(\xi - \mu)(-mx)\| + |A_2|\ \|(\xi - \mu)((2m+1)x)\|\\ &= \Lambda_m(\|\xi - \mu\|)(x).\end{aligned}$$

Wykazaliśmy więc, że

$$\|\mathcal{T}_m\xi(x)\ - \mathcal{T}_m\mu(x)\| \leqslant \Lambda_m(\|\xi - \mu\|)(x), \qquad \xi, \mu \in Y^X, x \in X, m \in \mathbb{Z}. \tag{3.79}$$

Dla wszystkich $l \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathcal{M}$ oraz $k \in \{-2m, m+1, -m, 2m+1\}$ z określenia funkcji ε_m oraz (3.73) mamy

$$\begin{aligned}\varepsilon_l(kx) &= L((2l+1)kx, -lkx, -lkx)\\ &\leqslant c(k)L((2l+1)x, -lx, -lx)\\ &= c(k)\varepsilon_l(x), \qquad x \in X.\end{aligned} \tag{3.80}$$

Z definicji operatora Λ_m (dla $m \in \mathbb{Z}$) mamy

$$\begin{aligned}\Lambda_m \varepsilon_l(x) &= |A_7|\varepsilon_l(-2mx) + |A_5 + A_6|\varepsilon_l((m+1)x)\\ &\quad + |A_3 + A_4|\varepsilon_l(-mx) + |A_2|\varepsilon_l((2m+1)x), \qquad x \in X.\end{aligned}$$

Ponadto zauważmy, że z (3.80) mamy

$$\begin{aligned}\Lambda_m \varepsilon_l(x) \leqslant \Big(&|A_7|c(-2m) + |A_5 + A_6|c(m+1) + |A_3 + A_4|c(-m)\\ &+|A_2|c(2m+1)\Big)\varepsilon_l(x), \qquad l \in \mathbb{Z}, m \in \mathcal{M}, x \in X,\end{aligned}$$

a z określenia β_m

$$\Lambda_m \varepsilon_l(x) \leqslant \beta_m \varepsilon_l(x), \qquad l \in \mathbb{Z}, m \in \mathcal{M}, x \in X. \tag{3.81}$$

Indukcyjnie pokażemy, że

$$\Lambda_m{}^n \varepsilon_l(x) \leqslant \Big(\beta_m\Big)^n \varepsilon_l(x), \qquad x \in X, \tag{3.82}$$

dla $l \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathcal{M}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Ustalmy $l \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathcal{M}$. Dla $n = 0$ warunek (3.82) jest oczywisty. Załóżmy, że (3.82) zachodzi dla ustalonego $n \in \mathbb{N}_0$. Wtedy, z założenia indukcyjnego i monotoniczności operatora Λ_m otrzymujemy

$$\begin{aligned}\Lambda_m^{n+1}\varepsilon_l(x) &= \Lambda_m(\Lambda_m^n \varepsilon_l)(x)\\ &\leqslant \Lambda_m\Big(\Big(\beta_m\Big)^n \varepsilon_l\Big)(x), \qquad x \in X.\end{aligned}$$

Korzystając teraz z liniowości operatora Λ_m oraz (3.81) mamy

$$\begin{aligned}\Lambda_m^{n+1}\varepsilon_l(x) &\leqslant \Big(\beta_m\Big)^n \Big(\Lambda_m \varepsilon_l\Big)(x)\\ &\leqslant \Big(\beta_m\Big)^n \beta_m \varepsilon_l(x)\\ &= \Big(\beta_m\Big)^{n+1} \varepsilon_l(x), \qquad x \in X,\end{aligned}$$

co kończy dowód warunku (3.82).

Wstawiając $l = m$ w (3.82) na mocy kryterium porównawczego otrzymujemy zbieżność następującego szeregu

$$\begin{aligned}\varepsilon_m^*(x) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \Lambda_m{}^n \varepsilon_m(x)\\ &\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\beta_m\Big)^n \varepsilon_m(x)\\ &= \frac{\varepsilon_m(x)}{1-\beta_m}, \qquad m \in \mathcal{M}, x \in X.\end{aligned}$$

Z twierdzenia 1.1 (zastosowanego do $S = X$ oraz $E = Y$) wynika, że dla każdego $m \in \mathcal{M}$ istnieje funkcja $F_m \colon X \to Y$ taka, że

$$\begin{aligned}F_m(x) &= A_7 F_m(-2mx) + (A_5 + A_6)F_m((m+1)x)\\ &\quad - (A_3 + A_4)F_m(-mx) - A_2 F_m((2m+1)x), \qquad x \in X,\end{aligned}$$

oraz

$$\|f(x) - F_m(x)\| \leqslant \frac{\varepsilon_m(x)}{1-\beta_m}, \qquad x \in X.$$

Ponadto

$$F_m(x) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{T}_m{}^n f(x), \qquad x \in X, m \in \mathcal{M}.$$

Następnie za pomocą indukcji pokażemy, że

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}_m{}^n f(x+y+z) &+ A_2\mathcal{T}_m{}^n f(x) + A_3\mathcal{T}_m{}^n f(y) + A_4\mathcal{T}_m{}^n f(z) \\ &- A_5\mathcal{T}_m{}^n f(x+y) - A_6\mathcal{T}_m{}^n f(x+z) \\ &- A_7\mathcal{T}_m{}^n f(y+z)\| \\ &\leqslant \left(\beta_m\right)^n L(x,y,z), \qquad (x,y,z) \in X^3, \end{aligned} \tag{3.83}$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathcal{M}$. Ustalmy w tym celu $m \in \mathcal{M}$. Dla $n = 0$ warunek (3.83) sprowadza się do (3.74). Załóżmy, że (3.83) zachodzi dla ustalonego $n \in \mathbb{N}_0$. Wtedy z definicji operatora $\mathcal{T}_m$ dla wszystkich $(x,y,z) \in X^3$ mamy

$$\begin{aligned} &\Big\|\mathcal{T}_m^{n+1} f(x+y+z) + A_2\mathcal{T}_m^{n+1} f(x) + A_3\mathcal{T}_m^{n+1} f(y) + A_4\mathcal{T}_m^{n+1} f(z) \\ &\qquad - A_5\mathcal{T}_m^{n+1} f(x+y) - A_6\mathcal{T}_m^{n+1} f(x+z) - A_7\mathcal{T}_m^{n+1} f(y+z)\Big\| \\ &= \Big\|A_7\mathcal{T}_m^n f(-2m(x+y+z)) + (A_5+A_6)\mathcal{T}_m^n f((m+1)(x+y+z)) \\ &\qquad - (A_3+A_4)\mathcal{T}_m^n f(-m(x+y+z)) - A_2\mathcal{T}_m^n f((2m+1)(x+y+z)) \\ &\qquad + A_7A_2\mathcal{T}_m^n f(-2mx) + (A_5+A_6)A_2\mathcal{T}_m^n f((m+1)x) \\ &\qquad - (A_3+A_4)A_2\mathcal{T}_m^n f(-mx) - A_2A_2\mathcal{T}_m^n f((2m+1)x) \\ &\qquad + A_7A_3\mathcal{T}_m^n f(-2my) + (A_5+A_6)A_3\mathcal{T}_m^n f((m+1)y) \\ &\qquad - (A_3+A_4)A_3\mathcal{T}_m^n f(-my) - A_2A_3\mathcal{T}_m^n f((2m+1)y) \\ &\qquad + A_7A_4\mathcal{T}_m^n f(-2mz) + (A_5+A_6)A_4\mathcal{T}_m^n f((m+1)z) \\ &\qquad - (A_3+A_4)A_4\mathcal{T}_m^n f(-mz) - A_2A_4\mathcal{T}_m^n f((2m+1)z) \\ &\qquad - A_7A_5\mathcal{T}_m^n f(-2m(x+y)) - (A_5+A_6)A_5\mathcal{T}_m^n f((m+1)(x+y)) \\ &\qquad + (A_3+A_4)A_5\mathcal{T}_m^n f(-m(x+y)) + A_2A_5\mathcal{T}_m^n f((2m+1)(x+y)) \\ &\qquad - A_7A_6\mathcal{T}_m^n f(-2m(x+z)) - (A_5+A_6)A_6\mathcal{T}_m^n f((m+1)(x+z)) \\ &\qquad + (A_3+A_4)A_6\mathcal{T}_m^n f(-m(x+z)) + A_2A_6\mathcal{T}_m^n f((2m+1)(x+z)) \\ &\qquad - A_7A_7\mathcal{T}_m^n f(-2m(y+z)) - (A_5+A_6)A_7\mathcal{T}_m^n f((m+1)(y+z)) \\ &\qquad + (A_3+A_4)A_7\mathcal{T}_m^n f(-m(y+z)) + A_2A_7\mathcal{T}_m^n f((2m+1)(y+z))\Big\|. \end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&\Big\|\mathcal{T}_m^{n+1}f(x+y+z)+A_2\mathcal{T}_m^{n+1}f(x)+A_3\mathcal{T}_m^{n+1}f(y)+A_4\mathcal{T}_m^{n+1}f(z)\\
&\qquad -A_5\mathcal{T}_m^{n+1}f(x+y)-A_6\mathcal{T}_m^{n+1}f(x+z)-A_7\mathcal{T}_m^{n+1}f(y+z)\Big\|\\
&\quad\leqslant\ |A_7|\Big\|\mathcal{T}_m^{n}f(-2m(x+y+z))+A_2\mathcal{T}_m^{n}f(-2mx)+A_3\mathcal{T}_m^{n}f(-2my)\\
&\qquad +A_4\mathcal{T}_m^{n}f(-2mz)-A_5\mathcal{T}_m^{n}f(-2m(x+y))\\
&\qquad -A_6\mathcal{T}_m^{n}f(-2m(x+z))-A_7\mathcal{T}_m^{n}f(-2m(y+z))\Big\|\\
&\quad+\ |A_5+A_6|\Big\|\mathcal{T}_m^{n}f((m+1)(x+y+z))+A_2\mathcal{T}_m^{n}f((m+1)x\\
&\qquad +A_3\mathcal{T}_m^{n}f((m+1)y)+A_4\mathcal{T}_m^{n}f((m+1)z)\\
&\qquad -A_5\mathcal{T}_m^{n}f((m+1)(x+y))-A_6\mathcal{T}_m^{n}f((m+1)(x+z))\\
&\qquad -A_7\mathcal{T}_m^{n}f((m+1)(y+z))\Big\|\\
&\quad+\ |A_3+A_4|\Big\|\mathcal{T}_m^{n}f(-m(x+y+z))+A_2\mathcal{T}_m^{n}f(-mx)+A_3\mathcal{T}_m^{n}f(-my)\\
&\qquad +A_4\mathcal{T}_m^{n}f(-mz)-A_5\mathcal{T}_m^{n}f(-m(x+y))-A_6\mathcal{T}_m^{n}f(-m(x+z))\\
&\qquad -A_7\mathcal{T}_m^{n}f(-m(y+z))\Big\|\\
&\quad+\ |A_2|\Big\|\mathcal{T}_m^{n}f((2m+1)(x+y+z))+A_2\mathcal{T}_m^{n}f((2m+1)x)\\
&\qquad +A_3\mathcal{T}_m^{n}f((2m+1)y)+A_4\mathcal{T}_m^{n}f((2m+1)z)\\
&\qquad -A_5\mathcal{T}_m^{n}f((2m+1)(x+y))-A_6\mathcal{T}_m^{n}f((2m+1)(x+z))\\
&\qquad -A_7\mathcal{T}_m^{n}f((2m+1)(y+z))\Big\|,\qquad (x,y,z)\in X^3.
\end{aligned}$$

Następnie, korzystając z założenia indukcyjnego dostajemy

$$\begin{aligned}
&\Big\|\mathcal{T}_m^{n+1}f(x+y+z)+A_2\mathcal{T}_m^{n+1}f(x)+A_3\mathcal{T}_m^{n+1}f(y)+A_4\mathcal{T}_m^{n+1}f(z)\\
&\qquad -A_5\mathcal{T}_m^{n+1}f(x+y)-A_6\mathcal{T}_m^{n+1}f(x+z)-A_7\mathcal{T}_m^{n+1}f(y+z)\Big\|\\
&\quad\leqslant\Big(\beta_m\Big)^n|A_7|L(-2mx,-2my,-2mz)\\
&\qquad+\Big(\beta_m\Big)^n|A_5+A_6|L\Big((m+1)x,(m+1)y,(m+1)z\Big)\\
&\qquad+\Big(\beta_m\Big)^n|A_3+A_4|L(-mx,-my,-mz)\\
&\qquad+\Big(\beta_m\Big)^n|A_2|L\Big((2m+1)x,(2m+1)y,(2m+1)z\Big)\\
&\quad\leqslant\Big(\beta_m\Big)^n\Big(|A_7|L(-2mx,-2my,-2mz)\\
&\qquad+|A_5+A_6|L\Big((m+1)x,(m+1)y,(m+1)z\Big)\\
&\qquad+|A_3+A_4|L(-mx,-my,-mz)\\
&\qquad+|A_2|L\Big((2m+1)x,(2m+1)y,(2m+1)z\Big)\Big),\qquad (x,y,z)\in X^3.
\end{aligned}$$

Stąd na mocy warunku (3.73) oraz określenia β_m otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&\Big\|\mathcal{T}_m^{n+1}f(x+y+z)+A_2\mathcal{T}_m^{n+1}f(x)+A_3\mathcal{T}_m^{n+1}f(y)+A_4\mathcal{T}_m^{n+1}f(z)\\
&\quad\leqslant\ \Big(\beta_m\Big)^n\Big(|A_7|c(-2m)+|A_5+A_6|c(m+1)\\
&\qquad +|A_3+A_4|c(-m)+|A_2|c(2m+1)\Big)L(x,y,z)\\
&\quad=\ \Big(\beta_m\Big)^{n+1}L(x,y,z),\qquad (x,y,z)\in X^3,
\end{aligned}$$

co kończy dowód warunku (3.83). Biorąc $n \to \infty$ w (3.83), dla wszystkich $(x, y, z) \in X^3$ oraz $m \in \mathcal{M}$ dostajemy

$$\begin{aligned} &F_m(x+y+z) + A_2F_m(x) + A_3F_m(y) + A_4F_m(z) \\ &\quad = A_5F_m(x+y) + A_6F_m(x+z) + A_7F_m(y+z). \end{aligned} \tag{3.84}$$

Zatem wykazaliśmy, że dla każdego $m \in \mathcal{M}$ istnieje funkcja $F_m : X \to Y$ spełniająca równanie (3.77) taka, że

$$\|f(x) - F_m(x)\| \leqslant \frac{\varepsilon_m(x)}{1-\beta_m}, \qquad x \in X. \tag{3.85}$$

Następnie pokażemy, że $F_m = F_l$ dla dowolnych $m, l \in \mathcal{M}$. W tym celu ustalmy $m, l \in \mathcal{M}$. Zauważmy, że każde rozwiazanie równania (3.84) jest punktem stałym operatora $\mathcal{T}_m$ (wystarczy zastąpić x przez $(2m+1)x$ oraz wziąć $y = z = -mx$ w (3.84)). Ponadto F_l spełnia (3.84) z m zastąpionym przez l. Zatem funkcje F_m, F_l są w punktami stałymi operatora $\mathcal{T}_m$, tj. $\mathcal{T}_mF_j = F_j$ dla $j = m, l$.

Ponadto z nierówności trójkąta i warunku (3.85) dostajemy

$$\begin{aligned} \|F_m(x) - F_l(x)\| &\leqslant \|f(x) - F_m(x)\| + \|f(x) - F_l(x)\| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon_m(x)}{1-\beta_m} + \frac{\varepsilon_l(x)}{1-\beta_l} =: \widetilde{\varepsilon}(x), \qquad x \in X. \end{aligned} \tag{3.86}$$

Wykażemy indukcyjnie, że dla wszystkich $n \in \mathbb{N}_0$ mamy

$$\|{\mathcal{T}_m}^nF_m(x) - {\mathcal{T}_m}^nF_l(x)\| \leqslant {\Lambda_m}^n\widetilde{\varepsilon}(x), \qquad x \in X. \tag{3.87}$$

Dla $n = 0$ warunek (3.87) zachodzi na mocy (3.86). Niech $n \in \mathbb{N}_0$ będzie ustaloną liczbą, dla której zachodzi (3.87). Na mocy warunku (3.79) zastosowanego dla $\xi = {\mathcal{T}_m}^nF_m$ i $\mu = {\mathcal{T}_m}^nF_l$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \|{\mathcal{T}_m}^{n+1}F_m(x) - {\mathcal{T}_m}^{n+1}F_l(x)\| &= \|\mathcal{T}_m({\mathcal{T}_m}^nF_m)(x) - \mathcal{T}_m({\mathcal{T}_m}^nF_l)(x)\| \\ &\leqslant \Lambda_m(\|{\mathcal{T}_m}^nF_m - {\mathcal{T}_m}^nF_l)\|(x), \qquad x \in X. \end{aligned}$$

Korzystając z monotoniczności operatora Λ_m oraz założenia indukcyjnego mamy więc, że

$$\|{\mathcal{T}_m}^{n+1}F_m(x) - {\mathcal{T}_m}^{n+1}F_l(x)\| \leqslant \Lambda_m({\Lambda_m}^n\widetilde{\varepsilon})(x) = {\Lambda_m}^{n+1}\widetilde{\varepsilon}(x), \qquad x \in X,$$

co kończy dowód (3.87). Zatem

$$\|F_m(x) - F_l(x)\| = \|{\mathcal{T}_m}^nF_m(x) - {\mathcal{T}_m}^nF_l(x)\| \leqslant {\Lambda_m}^n\widetilde{\varepsilon}(x), \qquad x \in X, n \in \mathbb{N}. \tag{3.88}$$

Stąd z liniowości operatora Λ_m oraz (3.82) mamy

$$\|F_m(x) - F_l(x)\| \leqslant \frac{{\Lambda_m}^n\varepsilon_m(x)}{1-\beta_m} + \frac{{\Lambda_m}^n\varepsilon_l(x)}{1-\beta_l} \leqslant \frac{\left(\beta_m\right)^n\varepsilon_m(x)}{1-\beta_m} + \frac{\left(\beta_k\right)^n\varepsilon_l(x)}{1-\beta_l}$$

dla wszystkich $x \in X$ and $n \in \mathbb{N}$. Biorąc $n \to \infty$ otrzymujemy $F_m = F_l =: F$. Stąd na mocy (3.85) mamy

$$\|f(x) - F(x)\| \leqslant \frac{\varepsilon_m(x)}{1 - \beta_m}, \qquad x \in X, m \in \mathcal{M},$$

a więc zachodzi (3.75).

W celu udowodnienia jedyności takiego rozwiązania przypuśćmy, że $G : X \to Y$ jest także rozwiązaniem równania (3.77) oraz $\|f(x) - G(x)\| \leqslant \rho_L(x)$ dla $x \in X$. Wtedy $\mathcal{T}_m G = G$ dla każdego $m \in \mathbb{Z}$ oraz

$$\|G(x) - F(x)\| \leqslant \|f(x) - G(x)\| + \|f(x) - F(x)\| \leqslant 2\rho_L(x), \qquad x \in X. \tag{3.89}$$

Ustalmy $m \in \mathcal{M}$. Wówczas analogicznie jak w (3.88) otrzymujemy

$$\|G(x) - F(x)\| = \|\mathcal{T}_m{}^n G(x) - \mathcal{T}_m{}^n F(x)\| \leqslant \Lambda_m{}^n(2\rho_L)(x), \qquad x \in X, n \in \mathbb{N}.$$

Stąd na mocy definicji ρ_L, monotoniczności i liniowości operatora Λ_m oraz (3.82) mamy

$$\|G(x) - F(x)\| \leqslant \frac{2\Lambda_m{}^n \varepsilon_m(x)}{1 - \beta_m} \leqslant \frac{2\Big(\beta_m\Big)^n \varepsilon_m(x)}{1 - \beta_m}$$

dla $x \in X$ oraz $n \in \mathbb{N}$. Biorąc $n \to \infty$ otrzymujemy, że $G = F$, co kończy dowód w przypadku, gdy $A_1 = 1$.

Jeśli $A_1 \neq 1$, to warunek (3.74) może być zapisany w postaci

$$\begin{aligned} \|f(x + y + z) + \widetilde{A_2} f(x) + \widetilde{A_3} f(y) + \widetilde{A_4} f(z) - \widetilde{A_5} f(x + y) - \widetilde{A_6} f(x + z) \\ - \widetilde{A_7} f(y + z)\| \leqslant \widetilde{L}(x, y, z), \qquad (x, y, z) \in X, \end{aligned} \tag{3.90}$$

gdzie

$$\widetilde{A_i} := \frac{A_i}{A_1}, \qquad i = 2, \dots, 7,$$

$$\widetilde{L}(x, y, x) := \frac{L(x, y, z)}{|A_1|}, \qquad (x, y, z) \in X,$$

i teraz możemy skorzystać z przypadku, gdy $A_1 = 1$. ■

Następujący rezultat o hiperstabilności rozważanego równania wynika z Twierdzenia 3.5.

Wniosek 3.3
Niech $(X, +)$ będzie grupą przemienna, Y będzie przestrzenią unormowaną nad ciałem $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $A_1, \dots, A_7 \in \mathbb{K}$ oraz $A_1 \neq 0$. Załóżmy, że $f\colon X \to Y$, $c : \mathbb{Z} \to [0, \infty)$, $L\colon X \to [0, \infty)$ spełniają warunki (3.72), (3.73), (3.74) oraz istnieje taki niepusty zbiór $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$, że

$$\sup_{m \in \mathcal{M}_0} \beta_m < |A_1|, \qquad \inf_{m \in \mathcal{M}_0} L((2m + 1)x, -mx, -mx) = 0, \qquad x \in X.$$

Wtedy f spełnia równanie (2) dla wszystkich $x, y, z \in X$.

Dowód. Zauważmy, że $\rho_L(x) = 0$ dla $x \in X$, gdzie ρ_L jest zdefiniowane jako (3.76). Zatem Twierdzenie 3.5 implikuje tezę, tj. przybliżone (w sensie (3.74)) rozwiązanie równania (2) jest rozwiązaniem dokładnym. ■

Wyniki powyższe korespondują z rezultatami w [13, 49] oraz klasycznymi wynikami o stabilności równania Cauchy'ego (patrz np. [10, p. 3], [33, p. 15,16] i [36, p. 2]).

Uwaga 3.1
Jeśli w Twierdzeniu 3.5 weźmiemy L takie, że $L(0,0,0) = 0$ oraz

$$L(x,y,z) = M\Big(\alpha_1\|x\|^p + \alpha_2\|y\|^p + \alpha_3\|z\|^p\Big)^w, \qquad (x,y,z) \in X^3 \setminus \{(0,0,0)\},$$

z $M, \alpha_i, p, w \in \mathbb{R}$ takimi, że $M > 0$, $\alpha_i > 0$ dla $i = 1,2,3$, $p > 0$ oraz $w < 0$, wtedy funkcja c może mieć na przykład postać $c(m) = |m|^{pw}$.

Wniosek 3.4 daje kolejną charakteryzację przestrzeni unitarnych (por. [5, Wniosek 5(i)]).

Wniosek 3.4
Niech X będzie przestrzenią unormowaną nad ciałem $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $\widehat{X} := X^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, $A_1, \dots, A_7 \in \mathbb{K}$ oraz $A_1 \neq 0$. Niech

$$\begin{aligned}\widehat{D}(x,y,z) := \Big| &A_1\|x+y+z\|^2 + A_2\|x\|^2 + A_3\|y\|^2 + A_4\|z\|^2 \\ &- A_5\|x+y\|^2 - A_6\|x+z\|^2 - A_7\|y+z\|^2\Big|, \qquad x,y,z \in X.\end{aligned}$$

Załóżmy, że istnieją $\alpha_i, w, p \in \mathbb{R}$ takie, że $p > 0$, $w < 0$, $\alpha_i > 0$ dla $i = 1,2,3$ oraz

$$M := \sup_{(x,y,z)\in\widehat{X}} \frac{\widehat{D}(x,y,z)}{\Big(\alpha_1\|x\|^p + \alpha_2\|y\|^p + \alpha_3\|z\|^p\Big)^w} < \infty.$$

Wtedy X jest przestrzenią unitarną.

Dowód. Niech $f(x) = \|x\|^2$ dla $x \in X$ oraz funkcje L i c mają postać opisaną w Uwadze 3.1. Wtedy są spełnione założenia Wniosku 3.3 z $\mathcal{M}_0 := \{m \in \mathcal{M} : m > m_0\}$, gdzie liczba $m_0 \in \mathbb{N}$ jest tak dobrana, aby $\sup_{m\in\mathcal{M}_0} \beta_m < |A_1|$. Zatem na mocy tego Wniosku 3.3, f jest rozwiązaniem równania (2).

Pokażemy, że $A_1 = ... = A_7$. Zastępując x przez αx, y przez βx przez z jako γx w równaniu (2) otrzymujemy

$$\begin{aligned}(A_1(\alpha &+ \beta+\gamma)^2 + A_2\alpha^2 + A_3\beta^2 + A_4\gamma^2)\|x\|^2 \\ &= (A_5(\alpha+\beta)^2 + A_6(\alpha+\gamma)^2 + A_7(\beta+\gamma)^2)\|x\|^2, \qquad x \in X, \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{K}.\end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned}A_1(\alpha &+ \beta+\gamma)^2 + A_2\alpha^2 + A_3\beta^2 + A_4\gamma^2 \\ &= A_5(\alpha+\beta)^2 + A_6(\alpha+\gamma)^2 + A_7(\beta+\gamma)^2, \qquad \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{K}. \qquad (3.91)\end{aligned}$$

Biorąc $\alpha = 1, \beta = \gamma = 0$ w (3.91) mamy

$$A_1 + A_2 = A_5 + A_6 \qquad (3.92)$$

i następnie z $\beta = -\alpha = 1$ oraz $\gamma = 0$ w (3.91) otrzymujemy równość $A_2 + A_3 = A_6 + A_7$, a w konsekwencji

$$A_1 - A_3 = A_5 - A_7. \tag{3.93}$$

Analogicznie gdy $\beta = 1, \alpha = \gamma = 0$ oraz $\beta = -\gamma = 1$, $\alpha = 0$ otrzymujemy

$$A_1 - A_4 = A_7 - A_6, \tag{3.94}$$

oraz $\gamma = 1, \alpha = \beta = 0$ i $\alpha = -\gamma = 1$, $\beta = 0$ dostajemy

$$A_1 - A_2 = A_6 - A_5. \tag{3.95}$$

Dalej wstawiając $1 = \alpha = -\beta = -\gamma$, $1 = -\alpha = \beta = -\gamma$ oraz $1 = -\alpha = -\beta = \gamma$ do (3.91) otrzymujemy odpowiednio

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 4A_7,$$

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 4A_6,$$

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 4A_5,$$

zatem $A_5 = A_6 = A_7$ oraz z (3.93)-(3.95) mamy, że $A_1 = A_2 = A_3 = A_4$. W konsekwencji z (3.92) dostajemy, że $A_1 = ... = A_7$.

Udowodniliśmy, że (4) zachodzi, co kończy dowód. ■

Rozdział 4

Rozwiązania

W bieżącym rozdziale przedstawimy rezultaty własne zawarte w publikacjach [4, 20] (uzyskane wspólnie ze współautorami tych prac); dotyczące rozwiązań równania (2), tj.

$$A_1F(x+y+z)+A_2F(x)+A_3F(y)+A_4F(z) = A_5F(x+y)+A_6F(x+z)+A_7F(y+z),$$

które rozważamy w klasie funkcji $F : X \to Y$, przy założeniu, że X jest monoidem, Y jest przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{K}$ liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ lub zespolonych $\mathbb{C}$ oraz $A_1, ..., A_7 \in \mathbb{K}$. Przypomnijmy, że każde rozwiązanie równania (3) spełnia warunek $F(0) = 0$, natomiast niekoniecznie tak jest w przypadku równania (2).

Równanie (2) jest szczególnym przypadkiem równania postaci (1), tj.

$$F(x_1 + \ldots + x_s) = \sum_{i=1}^{l} \Gamma_i(F(p_i(x_1, \ldots, x_r))) + D(x_1, \ldots, x_r), \qquad x_1, \ldots, x_r \in X.$$

Prezentujemy tutaj kilka dodatkowych obserwacji dotyczących rozwiązań równania (2). W szczególności wskażemy zależności między współczynnikami równania, jeśli dla rozwiązania F tego równania założymy warunek $F(0) = 0$ oraz podamy założenia gwarantujące, że każde rozwiązanie równania (2) spełnia warunek $F(0) = 0$.

Główny rezultat tego rozdziału mówi, że jeśli przyjmiemy założenie, że nie wszystkie współczynniki $A_1, ..., A_7$ są sobie równe, to każde rozwiązanie $F : X \to Y$ równania (2) takie, że $F(0) = 0$ jest funkcją addytywną. Natomiast, jeśli przy tym założeniu pominiemy warunek $F(0) = 0$, to rozwiązanie tego równania jest sumą funkcji addytywnej i stałej.

Oprócz tego zajmiemy się rozwiązaniami równania postaci (2.26) z $D(x, y, z) \equiv 0$, tj.

$$\begin{aligned} f(x+y+z) = {} & a_1f(x) + a_2f(y) + a_3f(z) \\ & + a_4f(x+y) + a_5f(x+z) + a_6f(y+z), \end{aligned} \tag{4.1}$$

które różni się tym od równania (2), że pierwszy współczynnik jest równy 1 oraz wszystkie pozostałe współczynniki znajdują się po prawej stronie równania.

W równaniu (2) dopuszczamy natomiast dowolne wartości wszystkich współczynników wyłączając tylko przypadek trywialny, w którym wszystkie współczynniki są równe. Zauważmy, że funkcja zerowa jest rozwiązaniem równań (2) oraz (4.1). W przypadku, gdy $A_1 \neq 0$, równanie (2) możemy sprowadzić do równania (4.1) dzieląc równanie (2) stronami przez A_1 i przenosząc odpowiednie wyrazy na drugą stronę równania.

Poniżej przedstawimy rezultat dotyczący postaci rozwiązań rówania (4.1).

Propozycja 4.1
Niech $a_1, \ldots, a_6 \in \mathbb{K}$. Jeśli funkcja $f \colon X \to Y$ jest rozwiązaniem równania (4.1), to jest ona postaci

$$f(x) = q(x) + \alpha(x) + d, \qquad x \in X,$$

gdzie $q : X \to Y$ jest funkcją kwadratową, $\alpha : X \to Y$ jest funkcją addytywna, $d \in Y$ jest stałą.

Dowód. Zauważmy, że podstawienie $x = y = z = 0$ w równaniu (4.1) skutkuje dwoma następującymi warunkami:

$$a_1 + \ldots + a_6 = 1 \qquad \text{lub} \qquad f(0) = 0. \tag{4.2}$$

Wstawiając w (4.1) $y = z = 0$, następnie $x = y = 0$, a potem $x = z = 0$ otrzymujemy odpowiednio

$$\begin{aligned}
(1 - a_1 - a_4 - a_5)f(x) =& (a_2 + a_3 + a_6)f(0), \\
(1 - a_3 - a_5 - a_6)f(x) =& (a_1 + a_2 + a_4)f(0), \\
(1 - a_2 - a_4 - a_6)f(x) =& (a_1 + a_3 + a_5)f(0),
\end{aligned}$$

dla $x \in X$. Jeśli $a_1 + a_4 + a_5 \neq 1$ lub $a_3 + a_5 + a_6 \neq 1$ lub $a_2 + a_4 + a_6 \neq 1$, to f jest funkcją stałą. Pozostaje więc rozważyć przypadek, gdy

$$\begin{cases} a_1 + a_4 + a_5 = 1, \\ a_3 + a_5 + a_6 = 1, \\ a_2 + a_4 + a_6 = 1. \end{cases} \tag{4.3}$$

Kładąc w równaniu (4.1) $z = 0$, następnie $y = 0$, a potem $x = 0$ otrzymujemy odpowiednio

$$(a_4 - 1)f(x + y) + (a_1 + a_5)f(x) + (a_2 + a_6)f(y) + a_3 f(0) = 0, \tag{4.4}$$

$$(a_5 - 1)f(x + z) + (a_1 + a_4)f(x) + (a_3 + a_6)f(z) + a_2 f(0) = 0, \tag{4.5}$$

$$(a_6 - 1)f(y + z) + (a_2 + a_4)f(y) + (a_3 + a_5)f(z) + a_1 f(0) = 0, \tag{4.6}$$

dla $x, y, z \in X$. Dodajmy powyższe trzy równości stronami, a następnie zastosujmy (4.3) oraz postać równania (4.1). Wówczas dostajemy

$$\begin{aligned}
f(x + y + z) +& f(x) + f(y) + f(z) - f(x + y) - f(x + z) \\
&- f(y + z) + (a_1 + a_2 + a_3)f(0) = 0, \qquad x, y, z \in X.
\end{aligned}$$

Jeśli $f(0) = 0$ otrzymujemy, że f spełnia równanie Frécheta, zatem f ma postać $f = \alpha + q$, gdzie $\alpha : X \to Y$ jest funkcją addytywną, $q : X \to Y$ jest funkcja kwadratową.

Jeśli $f(0) \neq 0$, to z warunku (4.2) mamy, że $a_1 + \ldots + a_6 = 1$. Zatem dodając stronami równości (4.3) dostajemy, że $a_4 + a_5 + a_6 = 2$, a w konsekwencji $a_1 + a_2 + a_3 = -1$. Zastąpmy x przez y oraz z przez x w (4.5), a także y przez x oraz z przez y w (4.6), a następnie dodajmy stronami otrzymane w ten sposób równania oraz równanie (4.4). Wówczas otrzymujemy

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - f(0), \qquad x, y \in X.$$

Stąd otrzymujemy, że $\alpha : X \to Y$ postaci $\alpha(x) := f(x) - f(0)$ dla $x \in X$ jest funkcją addytywną. Zatem $f(x) = \alpha(x) + d$, gdzie $d = f(0)$, co kończy dowód. ■

W poniższym rezultacie przedstawimy warunek wystarczający dla $F(0) = 0$ rozwiązania równania (2).

Propozycja 4.2
Jeśli zachodzi warunek

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \neq A_5 + A_6 + A_7, \tag{4.7}$$

to każde rozwiązanie $F : X \to Y$ *równania* (2) *spełnia warunek* $F(0) = 0$.

Dowód. Niech F będzie rozwiązaniem równania (2). Kładąc $x = 0$, $y = 0$ oraz $z = 0$ w równaniu (2) otrzymujemy

$$(A_1 + A_2 + A_3 + A_4)F(0) = (A_5 + A_6 + A_7)F(0). \tag{4.8}$$

Stąd jeśli $F(0) \neq 0$, to

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = A_5 + A_6 + A_7. \tag{4.9}$$

W konsekwencji biorąc pod uwagę założenie (4.7) mamy $F(0) = 0$. ■

Zauważmy, że w przypadku $A_1 = 1$ po przekształceniu równania (2) do postaci (4.1), warunek (4.7) przyjmuje postać

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_4 + a_6 \neq 1, \tag{4.10}$$

co jest zgodne z (4.2). Następne własności dotyczyć będą rozwiązań równania (2), które spełniają warunek $F(0) = 0$.

Propozycja 4.3
Jeżeli niezerowa funkcja $F : X \to Y$ *taka, że* $F(0) = 0$ *spełnia równanie* (2), *to*

$$\begin{cases} A_2 = -A_1 + A_5 + A_6, \\ A_3 = -A_1 + A_5 + A_7, \\ A_4 = -A_1 + A_6 + A_7. \end{cases} \tag{4.11}$$

Dowód. Kładąc $y = 0$, $z = 0$ w równaniu (2) dostajemy

$$A_1F(x) + A_2F(x) = A_5F(x) + A_6F(x), \quad x \in X.$$

Stąd
$$(A_1 + A_2 - A_5 - A_6)F(x) = 0, \quad x \in X.$$
Zatem
$$A_2 = -A_1 + A_5 + A_6,$$
ponieważ F jest niezerową funkcją. W podobny sposób otrzymujemy dwie pozostałe równości w (4.11). A dokładniej, wstawiając odpowiednio $x = 0,\ z = 0$ oraz $x = 0,\ y = 0$ dostajemy $A_3 = -A_1 + A_5 + A_7$ oraz $A_4 = -A_1 + A_6 + A_7$. ■

Propozycja 4.4
Załóżmy, że warunki (4.11) *są spełnione. Wtedy każda funkcja addytywna* $a : X \to Y$ *jest rozwiązaniem równania* (2).

Dowód. Niech $a : X \to Y$ będzie funkcją addytywną. Wtedy
$$\begin{aligned} &A_5 a(x+y) + A_6 a(x+z) + A_7 a(y+z) \\ &= (A_5 + A_6)a(x) + (A_5 + A_7)a(y) + (A_6 + A_7)a(z). \end{aligned} \tag{4.12}$$
Z warunku (4.11) otrzymujemy
$$\begin{aligned} &A_1 a(x+y+z) + A_2 a(x) + A_3 a(y) + A_4 a(z) = A_1 a(x+y+z) \\ &+ (-A_1 + A_5 + A_6)a(x) + (-A_1 + A_5 + A_7)a(y) + (-A_1 + A_5 + A_7)a(z). \end{aligned}$$
Korzystając z addytywności funkcji a upraszczamy wyrażenie po prawej stronie powyższej równości
$$\begin{aligned} &A_1 a(x+y+z) + A_2 a(x) + A_3 a(y) + A_4 a(z) \\ &= (A_5 + A_6)a(x) + (A_5 + A_7)a(y) + (A_6 + A_7)a(z). \end{aligned} \tag{4.13}$$
Stąd i addytywności funkcji a dostajemy
$$\begin{aligned} &A_1 a(x+y+z) + A_2 a(x) + A_3 a(y) + A_4 a(z) \\ &= A_5 a(x+y) + A_6 a(x+z) + A_7 a(y+z), \end{aligned}$$
tj. funkcja a spełnia równanie (2). ■

Wniosek 4.1
Niezerowa funkcja addytywna $a : X \to Y$ *spełnia równanie* (2) *wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi warunek* (4.11).

Dowód. Niech $a : X \to Y$ będzie niezerową funkcją addytywną. Załóżmy, że funkcja a spełnia równanie (2). Wtedy z Propozycji 4.3 relacje (4.11) zachodzą, ponieważ $a(0) = 0$. Natomiast odwrotną implikację otrzymujemy wprost z Propozycji 4.4. ■

Wniosek 4.2
Jeśli równanie (2) *ma niezerowe rozwiązanie* $F : X \to Y$ *takie, że* $F(0) = 0$, *to każda funkcja addytywna* $a : X \to Y$ *spełnia równanie* (2).

Dowód. Załóżmy, że równanie (2) ma niezerowe rozwiązanie $F : X \to Y$ takie, że $F(0) = 0$. Wtedy z Propozycji 4.3 zachodzą równości (4.11). Zatem z Wniosku 4.1 każda niezerowa funkcja addytywna spełnia równanie (2). ■

Powyższe rezultaty pokazują, że jeśli zbiór wszystkich niezerowych rozwiązań $F : X \to Y$ równania (2) takich, że $F(0) = 0$ jest niepusty, to zawiera zbiór wszystkich addytywnych funkcji $a : X \to Y$. Natomiast jeśli założymy, że zachodzą zależności (4.11) między współczynnikami równania, to z Propozycji 4.4 dostajemy, że rozważany zbiór rozwiązań równania (2) jest niepusty.

Przedstawimy teraz główne twierdzenie tego rozdziału. Rezultat ten otrzymujemy przy założeniu, że dwa dowolne współczynniki A_i są różne od siebie.

Twierdzenie 4.1
Jeśli $A_i \neq A_j$ dla pewnych $i, j \in \{1, ..., 7\}$, to każde rozwiązanie $F : X \to Y$ równania (2) *takie, że $F(0) = 0$ jest funkcją addytywną.*

Dowód. Zauważmy, że jeśli $F \equiv 0$ jest funkcją zerową, to F jest funkcją addytywną. Niech F będzie niezerowym rozwiązaniem równania (2) takim, że $F(0) = 0$. Wówczas na mocy Propozycji 4.3 zachodzą równości (4.11). Rozważmy dwa następujące przypadki: $A_1 \neq A_5$ oraz $A_1 = A_5$. Z własności (4.11) mamy

$$A_1 - A_5 = A_6 - A_2 = A_7 - A_3 := B. \tag{4.14}$$

Najpierw załóżmy, że $A_1 \neq A_5$. Kładąc $z = 0$ do równania (2) dostajemy

$$A_1F(x+y) + A_2F(x) + A_3F(y) = A_5F(x+y) + A_6F(x) + A_7F(y), \quad x, y \in X.$$

Stąd

$$(A_1 - A_5)F(x+y) = (A_6 - A_2)F(x) + (A_7 - A_3)F(y), \quad x, y \in X. \tag{4.15}$$

Z warunku (4.14) równanie (4.15) może być zapisane w postaci

$$BF(x+y) = BF(x) + BF(y), \quad x, y \in X,$$

gdzie $B \neq 0$. W rezultacie

$$F(x+y) = F(x) + F(y), \quad x, y \in X.$$

Teraz przechodzimy do przypadku, gdy $A_1 = A_5$. Z warunku (4.14) otrzymujemy, że $A_6 = A_2$ oraz $A_7 = A_3$, a równanie (2) jest postaci

$$\begin{aligned} &A_1F(x+y+z) + A_2F(x) + A_3F(y) + A_4F(z) \\ &= A_1F(x+y) + A_2F(x+z) + A_3F(y+z), \quad x, y, z \in X. \end{aligned}$$

Następnie kładąc $x = 0$ dostajemy, że

$$A_1F(y+z) + A_3F(y) + A_4F(z) = A_1F(y) + A_2F(z) + A_3F(y+z), \quad y, z \in X.$$

Stąd

$$(A_1 - A_3)F(y+z) = (A_1 - A_3)F(y) + (A_2 - A_4)F(z), \quad y, z \in X. \tag{4.16}$$

Z relacji (4.11) dostajemy, że

$$A_1 - A_7 = A_6 - A_4.$$

Zatem

$$A_1 - A_3 = A_2 - A_4 := C, \tag{4.17}$$

ponieważ z (4.14) mamy $A_7 = A_3$ oraz $A_6 = A_2$. W konsekwencji równanie (4.16) może być zapisane w postaci

$$CF(y+z) = CF(y) + CF(z), \quad y, z \in X. \tag{4.18}$$

Następnie rozważamy dwa podprzypadki: $A_1 \neq A_3$ oraz $A_1 = A_3$. Jeśli $A_1 \neq A_3$, to $C \neq 0$, a z (4.18) otrzymujemy, że F jest funkcją addytywną. Teraz załóżmy, że $A_1 = A_3$. Wtedy z warunków (4.14) i (4.17) dostajemy, że $A_1 = A_3 = A_5 = A_7$ oraz $A_2 = A_4 = A_6$. Stąd równanie (2) ma postać

$$\begin{aligned} &A_1F(x+y+z) + A_2F(x) + A_1F(y) + A_2F(z) \\ &= A_1F(x+y) + A_2F(x+z) + A_1F(y+z), \quad x, y, z \in X. \end{aligned}$$

Zatem kładąc $y = 0$ mamy

$$A_1F(x+z) + A_2F(x) + A_2F(z) = A_1F(x) + A_2F(x+z) + A_1F(z), \quad x, z \in X.$$

W konsekwencji

$$DF(x+z) = DF(x) + DF(z), \quad x, z \in X,$$

gdzie $D =: A_1 - A_2$. W rezultacie, jeśli $A_1 \neq A_2$, to F jest addytywna. ■

Bezpośrednio z Twierdzenia 4.1 otrzymujemy następujący wniosek.

Wniosek 4.3
Jeśli istnieje nieaddytywne niezerowe rozwiązanie $F : X \to Y$ *równania* (2) *takie, że* $F(0) = 0$, *to* $A_i = A_j$ *dla wszystkich* $i, j \in \{1, ..., 7\}$.

Ponadto z Twierdzenia 4.1 i Propozycji 4.2 bezpośrednio otrzymujemy następujący opis zbioru rozwiązań równania (2).

Wniosek 4.4
Jeśli $A_i \neq A_j$ *dla pewnych* $i, j \in \{1, ..., 7\}$ *oraz warunek* (4.7) *zachodzi, to każde rozwiązanie równania* (2) *jest funkcją addytywną.*

W dowodzie Propozycji 4.1 pokazaliśmy, że jeśli rozwiązanie równania (4.1) spełnia warunek $f(0) = 0$, to ma ono postać $f = \alpha + q$, gdzie $\alpha : X \to Y$ jest funkcją addytywną, $q : X \to Y$ jest funkcja kwadratową. Korzystając z Twierdzenia 4.1 możemy podać warunki, które gwarantują, ze w tym przypadku zbiór rozwiązań zawiera tylko funkcje addytywne.

Wniosek 4.5
Jeśli zachodzi warunek (4.10) *oraz co najmniej jedna z poniższych równości nie jest spełniona*
$$a_1 = -1, \quad a_2 = -1, \quad a_3 = -1, \quad a_4 = 1, \quad a_5 = 1, \quad a_6 = 1,$$
to każde rozwiązanie równania (4.1) *jest funkcją addytywną.*

Teraz sformułujemy dwa rezultaty, w których nie będziemy zakładać, że rozwiązanie $F : X \to Y$ rozważanego równania spełnia warunek $F(0) = 0$.

Wniosek 4.6
Załóżmy, że $A_i \neq A_j$ *dla pewnych* $i, j \in \{1, ..., 7\}$. *Jeśli* $F : X \to Y$ *jest rozwiązaniem równania* (2), *to*
$$F(x) = a(x) + c, \quad x \in X, \tag{4.19}$$
gdzie $a : X \to Y$ *jest funkcją addytywną oraz* $c = F(0)$.

Dowód. Niech F spełnia równanie (2). Jeśli $F(0) = 0$, to z Twierdzenia 4.1 otrzymujemy, że F jest postaci (4.19) z $c = 0$. Następnie załóżmy, że $F(0) \neq 0$. Zdefiniujmy funkcję $F_0 : X \to Y$ jako
$$F_0(x) := F(x) - F(0), \quad x \in X.$$
Wtedy F_0 jest rozwiązaniem równania (2), ponieważ F spełnia równanie (2) a w konsekwencji zachodzi warunek (4.8). Z Twierdzenia 4.1 funkcja F_0 jest addytywna, gdyż $F_0(0) = 0$. Zatem F jest sumą funkcji addytywnej oraz stałej $c := F(0)$.

■

Zauważmy, że teza odwrotna do Wniosku 4.6 jest fałszywa. Przy założeniu $A_i \neq A_j$ dla pewnych $i, j \in \{1, ..., 7\}$ możemy tak dobrać współczynniki równania (2), że zbiór rozwiązań składa się tylko z funkcji zerowej, z wszystkich funkcji stałych lub z wszystkich funkcji addytywnych. Rozważmy przypadek, gdy $A_1 = 2$ oraz $A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = A_6 = A_7 = 1$. Wtedy z Propozycji 4.2 dla pewnego rozwiązania F równania (2) mamy $F(0) = 0$, ponieważ warunek (4.7) zachodzi. Zatem powołując się na Wniosek 4.1 otrzymujemy, że jedynym rozwiązaniem równania (2) jest funkcja zerowa, ponieważ warunek (4.11) nie jest spełniony. W przypadku, gdy $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = A_6 = 1$ oraz $A_7 = 2$, zbiór rozwiązań równania (2) składa się z wszystkich funkcji stałych, ponieważ żaden z warunków (4.7) oraz (4.11) nie zachodzi.

Teraz rozważmy przypadek, gdy $A_1 = 3$, $A_2 = A_3 = A_4 = -1$ oraz $A_5 = A_6 = A_7 = 1$. Wtedy z Propozycji 4.2 mamy $F(0) = 0$, dla każdego rozwiązania F równania (2). Zatem z Propozycji 4.4 otrzymujemy, że zbiór rozwiązań równania (2) złożony jest z funkcji addytywnych. W przypadku, gdy $A_1 = 3$, $A_2 = A_3 = A_4 = 1$ oraz $A_5 = A_6 = A_7 = 2$, każda funkcja F postaci (4.19) jest rozwiązaniem równania (2). Wynik sformułowany bardziej ogólnie przedstawiamy poniżej.

Wniosek 4.7
Załóżmy, że warunki (4.9) *oraz* (4.11) *zachodzą. Jeżeli* $F : X \to Y$ *jest postaci* (4.19), *gdzie* $a : X \to Y$ *jest funkcją addytywną oraz* $c \in Y$, *to* F *jest rozwiązaniem równania* (2).

Dowód. Ponieważ relacja (4.11) zachodzi, powołując się na Propozycję 4.4 mamy, że każda addytywna funkcja spełnia równanie (2). Ponadto warunek (4.9) implikuje, że funkcja stała jest rozwiązaniem równania (2). ■

Na końcu tego rozdziału przypomnijmy, że pozostał jeszcze przypadek, gdy $A_1 = ... = A_7$, w którym istnieje nieaddytywne rozwiązanie F równania takie, że $F(0) = 0$. Mianowicie, bez straty ogólności możemy założyć, że $A_1 = ... = A_7 = 1$, otrzymując równanie (3) (wykluczmy przypadek trywialny, gdy $A_1 = ... = A_7 = 0$). Załóżmy, że $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią unitarną oraz $Y = \mathbb{R}$. Wtedy funkcja $F : X \to \mathbb{R}$ postaci $F(x) := \|x\|^2$, gdzie norma pochodzi od iloczynu skalarnego, jest rozwiązaniem równania (2), (por. [30]). Ponadto w tej rozprawie zostało udowodnione, że jeśli $F : X \to \mathbb{R}$, $F(x) = \|x\|^2$ jest rozwiązaniem (2), to $A_1 = ... = A_7$. Rezultat ten pochodzi z publikacji [42] (i nawiązuje do Wniosku 4.3).

Rozdział 5

Zastosowania i przykłady

5.1 Zastosowania rozwiązań addytywnych

W tym podrozdziale pokażemy zastosowania addytywnych rozwiązań w głównych rezultatach dotyczących stabilności dla równania (2) dla przypadku (I). Zauważmy, że wynik prezentowany poniżej nie może być zastosowany do równania (3), ponieważ jego założenie wyklucza przypadek gdy $A_1 = ... = A_7 = 1$.

Wniosek 5.1
Niech $(X, +)$ *będzie grupą abelową,* Y *będzie przestrzenią Banacha. Załóżmy, że* $A_i \neq A_j$ *dla pewnych* $i, j \in \{1, ..., 7\}$, $A_2 + A_3 + A_4 \neq 0$, $L\colon X^3 \to [0, \infty)$ *spełnia warunek* (3.10) *oraz* $\beta_0, \beta \in [0, 1)$, *gdzie* β_0 *oraz* β *oraz są zdefiniowane jak w Twierdzeniu 3.1. Niech* $f\colon X \to Y$ *będzie funkcją spełniającą warunek* (3.12). *Wtedy istnieje jedyne addytywne rozwiązanie* $a : X \to Y$ *równania* (2) *takie, że*

$$\|f(x) - a(x)\| \leqslant \frac{L(x, x, x)}{|A_2 + A_3 + A_4|(1 - \gamma(x))}, \qquad x \in X, \tag{5.1}$$

z

$$\gamma(x) := \begin{cases} \beta & \text{jeśli} \quad x \neq 0, \\ \beta_0 & \text{jeśli} \quad x = 0. \end{cases}$$

Dowód. Powołując się na Twierdzenie 3.1 istnieje jedyne rozwiązanie $F : X \to Y$ równania (2) takie, że

$$\|f(x) - F(x)\| \leqslant \rho_L(x), \qquad x \in X.$$

Wtedy z Propozycji 4.2 i Twierdzenia 4.1 otrzymujemy, że F jest addytywna. ■

Z Wniosku 4.6 otrzymujemy zaprezentowany poniżej analogiczny rezultat do Wniosku 5.1.

Wniosek 5.2
Niech $(X, +)$ *będzie przemiennym monoidem,* Y *będzie przestrzenią Banacha. Niech* $A_i \neq A_j$ *dla pewnych* $i, j \in \{1, ..., 7\}$, $A_2 + A_3 + A_4 \neq 0$ *oraz relacje* (4.11) *zachodzą. Niech funkcja* $L\colon X^3 \to [0, \infty)$ *spełnia warunek* (3.34) *z* $c_2, c_3 \in [0, \infty)$ *takimi, że*

$\beta := b_2c_2 + b_3c_3 < 1$, *gdzie* b_2, b_3 *są określone w* (3.11). *Jeśli* $f\colon X \to Y$ *spełnia warunek* (3.12)*, to istnieje jedyna funkcja addytywna* $a : X \to Y$ *oraz jedyna stała* $c \in Y$ *takie, że*

$$\|f(x) - a(x) - c\| \leqslant \rho_L(x), \qquad x \in X,$$

gdzie $\rho_L(x)$ *jest dana wzorem* (5.1)*. Ponadto, funkcja* $F : X \to Y$ *postaci* $F = a + c$ *jest jedynym rozwiązaniem równania* (2) *spełniającym warunek*

$$\|f(x) - F(x)\| \leqslant \rho_L(x), \qquad x \in X.$$

Zauważmy, że warunek

$$L(kx, ky, kz) \leqslant c_k L(x, y, z), \qquad k \in \{2, 3\}, \tag{5.2}$$

dla $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ oznacza, że $L(0, 0, 0) = 0$ albo $c_2, c_3 \in [1, \infty)$.

Niech X będzie przestrzenią unormowaną. Wtedy funkcja kontrolna $L : X^3 \to [0, \infty)$ dana jako

$$L(x, y, z) := (\alpha_1\|x\|^{p_1} + \alpha_2\|y\|^{p_2} + \alpha_3\|z\|^{p_3})^w, \qquad (x, y, z) \in \widehat{X}, \tag{5.3}$$

z pewnymi stałymi $p_i, w, \alpha_i \in \mathbb{R}$ takimi, że $p_i > 0$ oraz $\alpha_i > 0$ dla $i \in \{1, 2, 3\}$, spełnia warunek (3.10) z

$$c_k = k^{pw}, \qquad k \in \{2, 3\},$$

gdzie

$$p = \begin{cases} \max\{p_1, p_2, p_3\} & \text{jeśli } w > 0; \\ \min\{p_1, p_2, p_3\} & \text{jeśli } w < 0. \end{cases}$$

Z (3.15) mamy

$$\rho_L(x) = \frac{(\alpha_1\|x\|^{p_1} + \alpha_2\|x\|^{p_2} + \alpha_3\|x\|^{p_3})^w}{|A_2 + A_3 + A_4|(1 - \beta)}, \qquad x \in X \setminus \{0\}.$$

Wartości funkcji L w $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ mogą być brane dowolnie. W szczególnym przypadku $L(0, 0, 0)$ może przyjmować wartości lewej strony warunku (3.12) w $x = y = z = 0$. Dla $x = 0$ mamy

$$\rho_L(0) = \frac{L(0, 0, 0)}{|A_2 + A_3 + A_4|(1 - \beta_0)}.$$

Wtedy przybliżone rozwiązanie f spełniające (3.12) nie musi spełniać warunku $f(0) = 0$.

Niech $A_1 = -4$, $A_2 = A_3 = A_4 = 8$ oraz $A_5 = A_6 = A_7 = 2$. Relacje (4.11) zachodzą oraz $b_2 = \frac{1}{4}$, $b_3 = \frac{1}{6}$. Rozważmy funkcję $L : X^3 \to [0, \infty)$ postaci

$$L(x, y, z) := \|x\|^p + \|y\|^p + \|z\|^p, \qquad (x, y, z) \in X^3,$$

z pewnymi $p \in \mathbb{R}$ takimi, że $p > 0$. Spełnia ona warunek (3.34) z $c_k = |k|^p$ dla $k \in \{2, 3\}$. Zatem $\beta < 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p \in (0, 1)$, ponieważ $2b_2 + 3b_3 = 1$, gdzie b_2, b_3

dane są zdefiniowane w (3.11). W tym przypadku zatem Wniosek 5.2 implikuje, że dla funkcji $f\colon X \to Y$ spełniającej warunek (3.12), istnieje funkcja addytywna F taka, że

$$\|f(x) - F(x)\| \leqslant \rho_L(x), \qquad x \in X,$$

gdzie

$$\rho_L(x) = \frac{L(x,x,x)}{24(1-\beta)}, \qquad x \in X.$$

Teraz rozważmy funkcję $L : X^3 \to [0,\infty)$ postaci

$$L(x,y,z) := (\alpha_1\|x\|^p + \alpha_2\|y\|^p + \alpha_3\|z\|^p)^w + \varepsilon, \qquad (x,y,z) \in X,$$

z pewnymi stałymi $p, w, \alpha_i \in \mathbb{R}$ takimi, że $p > 0$, $w > 0$, $\alpha_i > 0$ dla $i \in \{1,2,3\}$ oraz $\varepsilon > 0$. Wtedy warunek (3.10) zachodzi z $c_k = k^{pw}$, ponieważ $k^{pw} > 1$.

Zauważmy, że przy założeniach Wniosku 5.1 dostajemy, że

$$-3A_1 + 2(A_5 + A_6 + A_7) \neq 0,$$

w przypadku, gdy rozwiązanie równania (2) występujące w tym wniosku jest funkcją niezerową. Wynika to z Wniosku 4.1 na mocy którego relacje (4.11) są spełnione. Zatem $A_2 + A_3 + A_4 = -3A_1 + 2(A_5 + A_6 + A_7)$.

Zauważmy również, że funkcja $L : X^3 \to [0,\infty)$ postaci

$$L(x,y,z) := \alpha\|x\|^{p_1}\|y\|^{p_2}\|z\|^{p_3} + \varepsilon, \qquad (x,y,z) \in \widehat{X},$$

z pewnymi stałymi $p_1, p_2, p_3, \alpha, \varepsilon \in [0,\infty)$ spełnia (3.10) z

$$c_k = k^{p_1+p_2+p_3}, \qquad k \in \{2,3\},$$

gdyż $c_k \geqslant 1$.

5.2 Przykłady oszacowań

Dla każdego przypadku (I)-(VII) możemy otrzymać oszacowanie

$$\|f(x) - F(x)\| \leqslant \rho_L(x)$$

odległości pomiędzy przybliżonym rozwiązaniem f równania (2) a jego dokładnym rozwiązaniem F, otrzymanym za pomocą Twierdzenia 1.1. Przypadek (I) został omówiony dokładniej w poprzednim podrozdziale. Poniżej przedstawiamy listę wzorów funkcji ρ_L oraz odpowiednich stałych $b < 1$, otrzymanych w kolejnych przypadkach, szacujących tę odległość (por. relacje (3.3)-(3.9)).

(I) $$\rho_L(x) := \frac{L(x,x,x)}{|A_2 + A_3 + A_4|(1-b)}, \qquad b := c(2)d(2) + c(3)d(3) < 1,$$

$$d(2) := \left|\frac{A_5 + A_6 + A_7}{A_2 + A_3 + A_4}\right|,\ d(3) := \left|\frac{A_1}{A_2 + A_3 + A_4}\right|;$$

$$\text{(II)} \qquad \rho_L(x) := \frac{L(x, x, -x)}{|A_1 + A_2 + A_3|(1 - b)}, \qquad b := c(2)d(2) + c(0)d(0) + c(-1)d(-1) < 1,$$

$$d(2) := \left|\frac{A_5}{A_1 + A_2 + A_3}\right|,\ d(0) := \left|\frac{A_6 + A_7}{A_1 + A_2 + A_3}\right|,\ d(-1) := \left|\frac{A_4}{A_1 + A_2 + A_3}\right|;$$

$$\text{(III)} \qquad \rho_L(x) := \frac{L(x, -x, x)}{|A_1 + A_2 + A_4|(1 - b)}, \qquad b := c(2)d(2) + c(0)d(0) + c(-1)d(-1) < 1,$$

$$d(2) := \left|\frac{A_6}{A_1 + A_2 + A_4}\right|,\ d(0) := \left|\frac{A_5 + A_7}{A_1 + A_2 + A_4}\right|,\ d(-1) := \left|\frac{A_3}{A_1 + A_2 + A_4}\right|;$$

$$\text{(IV)} \qquad \rho_L(x) := \frac{L(-x, x, x)}{|A_1 + A_3 + A_4|(1 - b)}, \qquad b := c(2)d(2) + c(0)d(0) + c(-1)d(-1) < 1,$$

$$d(2) := \left|\frac{A_7}{A_1 + A_3 + A_4}\right|,\ d(0) := \left|\frac{A_5 + A_6}{A_1 + A_3 + A_4}\right|,\ d(-1) := \left|\frac{A_2}{A_1 + A_3 + A_4}\right|;$$

$$\text{(V)} \qquad \rho_L(x) := \frac{L(x, x, 0)}{|A_6 + A_7 - A_2 - A_3|(1 - b)}, \qquad b := c(2)d(2) + c(0)d(0) < 1,$$

$$d(2) := \left|\frac{A_1 - A_5}{A_6 + A_7 - A_2 - A_3}\right|,\ d(0) := \left|\frac{A_4}{A_6 + A_7 - A_2 - A_3}\right|;$$

$$\text{(VI)} \qquad \rho_L(x) := \frac{L(x, 0, x)}{|A_5 + A_7 - A_2 - A_4|(1 - b)}, \qquad b := c(2)d(2) + c(0)d(0) < 1,$$

$$d(2) := \left|\frac{A_1 - A_6}{A_5 + A_7 - A_2 - A_4}\right|,\ d(0) := \left|\frac{A_3}{A_5 + A_7 - A_2 - A_4}\right|;$$

$$\text{(VII)} \qquad \rho_L(x) := \frac{L(0, x, x)}{|A_5 + A_6 - A_3 - A_4|(1 - b)}, \qquad b := c(2)d(2) + c(0)d(0) < 1,$$

$$d(2) := \left|\frac{A_1 - A_7}{A_5 + A_6 - A_3 - A_4}\right|,\ d(0) := \left|\frac{A_2}{A_5 + A_6 - A_3 - A_4}\right|.$$

Teraz podamy przykłady. Niech X będzie przestrzenią unormowaną. Rozważmy funkcję $L : X^3 \to [0, \infty)$ daną wzorem

$$L(x, y, z) := \|x\|^p + \|y\|^p + \|z\|^p, \qquad (x, y, z) \in X^3, \tag{5.4}$$

z pewnymi $p \in \mathbb{R}$ takimi, że $p > 0$. Spełnia ona warunek

$$L(kx, ky, kz) \leqslant c(k)L(x, y, z), \qquad (x, y, z) \in X^3$$

z $c(k) = |k|^p$ dla każdego $k \in \mathbb{Z}$, ponieważ $L(kx, ky, kz) = |k|^p L(x, y, z)$. Zatem $c(0) = 0$ oraz $c(k) \geqslant 1$ dla wszystkich $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Zatem dla takiego c mamy następujące założenia

(I) $\quad d(2) + d(3) \leqslant b < 1, \qquad d(2) + d(3) = \left|\frac{A_5 + A_6 + A_7}{A_2 + A_3 + A_4}\right| + \left|\frac{A_1}{A_2 + A_3 + A_4}\right|;$

(II) $\quad d(2) + d(-1) \leqslant b < 1, \qquad d(2) + d(-1) = \left|\frac{A_5}{A_1 + A_2 + A_3}\right| + \left|\frac{A_4}{A_1 + A_2 + A_3}\right|;$

(III) $\quad d(2) + d(-1) \leqslant b < 1, \qquad d(2) + d(-1) = \left|\frac{A_6}{A_1 + A_2 + A_4}\right| + \left|\frac{A_3}{A_1 + A_2 + A_4}\right|;$

(IV) $\quad d(2) + d(-1) \leqslant b < 1, \qquad d(2) + d(-1) = \left|\frac{A_7}{A_1 + A_3 + A_4}\right| + \left|\frac{A_2}{A_1 + A_3 + A_4}\right|;$

(V) $\quad d(2) \leqslant b < 1, \qquad d(2) = \left|\frac{A_1 - A_5}{A_6 + A_7 - A_2 - A_3}\right|;$

(VI) $\quad d(2) \leqslant b < 1, \qquad d(2) = \left|\frac{A_1 - A_6}{A_5 + A_7 - A_2 - A_4}\right|;$

(VII) $\quad d(2) \leqslant b < 1, \qquad d(2) = \left|\frac{A_1 - A_7}{A_5 + A_6 - A_3 - A_4}\right|.$

Teraz pokażemy jak można zastosować Twierdzenia 3.3 i 3.4 do udowodnienia stabilności równania (2) dla pewnych szczególnych przypadków wartości współczynników $A_i, i = 1, ..., 7$.

Rozważmy następujący przykład. Weźmy w Twiedzeniu 3.3 następujące współczynniki A_i

$$A_1 = 6, A_2 = 1, A_3 = 2, A_4 = A_5 = 3, A_6 = 4, A_7 = 5.$$

Z (3.36) mamy

$$d(2) = \frac{1}{3},\ d(-1) = \frac{1}{3},$$

stąd z (3.53) dostajemy, że

$$b = c(2)d(2) + c(-1)d(-1) = \frac{2^p}{3} + \frac{1}{3}.$$

W konswekwencji $b < 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p \in (0, 1)$. W szczególnym przypadku dla $p = \frac{1}{2}$ mamy $b = \frac{\sqrt{2}+1}{3}$ oraz

$$\rho_L(x) = \frac{L(x, x, -x)}{9(1 - \frac{\sqrt{2}+1}{3})} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}\sqrt{\|x\|}.$$

Zatem
$$\|f(x) - F(x)\| \leqslant \frac{2+\sqrt{2}}{2}\sqrt{\|x\|},$$
gdzie F jest postaci
$$F(x) = a(x) + c, \qquad x \in X,$$
z funkcją addytywną $a : X \to Y$ i $c = f(0)$.

Aby udowodnić stabilność równania (2) dla tych samych wartości współczynników użyjemy teraz Twierdzenie 3.4. Wtedy z (3.57) i (3.70) mamy $d(2) = \frac{1}{2}$ oraz
$$b = c(2)d(2) = \frac{2^p}{2}.$$
W konsekwencji $b < 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p \in (0,1)$. W szczególnym przypadku dla $p = \frac{1}{2}$ mamy $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ oraz
$$\rho_L(x) = \frac{L(x,x,0)}{6(1-\frac{\sqrt{2}}{2})} = \frac{2+\sqrt{2}}{3}\sqrt{\|x\|}.$$
Zatem
$$\|f(x) - F(x)\| \leqslant \frac{2+\sqrt{2}}{3}\sqrt{\|x\|}.$$

Podsumowując, dla rozważanych wartości współczynników w Twierdzeniu 3.4 otrzymujemy lepsze przybliżenie niż w Twierdzeniu 3.3, ponieważ w przypadku, gdy $p \in (0,1)$ mamy
$$\frac{2^p}{2} < \frac{2^p}{3} + \frac{1}{3}.$$

Rozważmy kolejny przykład. Weźmy następujące współczynniki:
$$A_1 = A_2 = A_3 = 2, A_4 = A_5 = A_6 = A_7 = 1.$$
W Twierdzeniu 3.3 z (3.36) mamy
$$d(2) = \frac{1}{6},\ d(-1) = \frac{1}{6},$$
stąd z (3.53) dostajemy, że
$$b = c(2)d(2) + c(-1)d(-1) = \frac{2^p}{6} + \frac{1}{6}.$$
W konsekwencji $b < 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p \in (0, \log_2 5)$. W szczególnym przypadku dla $p = 1$ mamy $b = \frac{1}{2}$ oraz
$$\rho_L(x) = \frac{L(x,x,-x)}{6(1-\frac{1}{2})} = \frac{L(x,x,-x)}{3} = \|x\|.$$
Dla $p = \frac{1}{2}$ mamy $b = \frac{\sqrt{2}+1}{6}$ oraz
$$\rho_L(x) = \frac{L(x,x,-x)}{6(1-\frac{\sqrt{2}+1}{6})} = \frac{L(x,x,-x)}{5-\sqrt{2}} = \frac{3(5+\sqrt{2})}{23}\sqrt{\|x\|} \approx 0.8366\sqrt{\|x\|}.$$

W celu wykazania stabilności równania (2) dla tych samych wartości współczynników zastosujemy także Twierdzenie 3.4. Wtedy z (3.57) i (3.70) mamy $d(2) = \frac{1}{2}$ oraz

$$b = c(2)d(2) = \frac{2^p}{2}.$$

W konsekwencji $b < 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p \in (0, 1)$. W szczególnym przypadku dla $p = \frac{1}{2}$ mamy $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ oraz

$$\rho_L(x) = \frac{L(x, x, 0)}{2(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})} = (2 + \sqrt{2})\sqrt{\|x\|} \approx 3.4142\sqrt{\|x\|}.$$

Zatem w Twierdzeniu 3.3 dostajemy lepsze przybliżenie niż Twierdzeniu 3.4, ponieważ dla $p > 0$ mamy

$$\frac{2^p}{6} + \frac{1}{6} < \frac{2^p}{2}.$$

Ponadto w Twierdzeniu 3.3 otrzymujemy szerszy przedział dla potęgi p.

Przedstawimy teraz pewne kolejne uwagi dotyczące funkcji kontrolnej L. Niech funkcja kontrolna $L : X^3 \to \mathbb{K}$ spełnia następującą nierówność

$$L(kx, ky, kz) \leqslant c(k)L(x, y, z), \qquad (x, y, z) \in X^3$$

dla pewnych $k \in \mathbb{Z}$. Zdefiniujmy $\widetilde{L} : X^3 \to \mathbb{K}$ wzorem

$$\widetilde{L}(x, y, z) := L(x, y, z) + \delta,$$

gdzie $\delta > 0$. Wtedy, jeśli $c(k) \geqslant 1$, to

$$\begin{aligned}
\widetilde{L}(kx, ky, kz) &= L(kx, ky, kz) + \delta \\
&\leqslant c(k)L(x, y, z) + \delta \\
&\leqslant c(k)\Big(L(x, y, z) + \frac{\delta}{c(k)}\Big) \\
&\leqslant c(k)(L(x, y, z) + \delta) = c(k)\widetilde{L}(x, y, z).
\end{aligned}$$

Niech funkcja L będzie dana wzorem (5.4). Wtedy

$$\widetilde{L}(x, y, z) = \|x\|^p + \|y\|^p + \|z\|^p + \delta, \qquad (x, y, z) \in X^3 \tag{5.5}$$

oraz warunek

$$\widetilde{L}(kx, ky, kz) \leqslant \widetilde{c}(k)\widetilde{L}(x, y, z), \qquad (x, y, z) \in X^3 \tag{5.6}$$

zachodzi dla każdego $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ z $\widetilde{c}(k) = |k|^p$. Dla $k = 0$ mamy $\widetilde{L}(kx, ky, kz) = \delta$ dla wszystkich $(x, y, z) \in X^3$. Zatem relacja (5.6) zachodzi z $\widetilde{c}(0) = 1$, ponieważ δ jest wartością minimalną L. Zatem zostało otrzymane, że

$$\widetilde{c}(k) := \begin{cases} |k|^p, & \text{jeśli} \quad k \neq 0, \\ 1, & \text{jeśli} \quad k = 0. \end{cases}$$

Niech

$$A_1 = A_2 = A_3 = 2, A_4 = A_5 = A_6 = A_7 = 1.$$

Z Twierdzenia 3.3

$$\widetilde{b} = \widetilde{c}(2)d(2) + \widetilde{c}(0)d(0) + \widetilde{c}(-1)d(-1) = \frac{2^p + 3}{6}.$$

Stąd $\widetilde{b} < 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p \in (0, \log_2 3)$. Dla $p = 1$ mamy $\widetilde{b} = \frac{5}{6}$ oraz

$$\rho_L(x) = \frac{\widetilde{L}(x, x, -x)}{6(1 - \frac{5}{6})} = \widetilde{L}(x, x, -x) = 3\|x\|^p + \delta.$$

Teraz niech $A_2 = A_3 = 2$, $A_1 = A_4 = A_5 = A_6 = A_7 = 1$. W Twierdzeniu 3.3 $\widetilde{b} = \frac{2^p+3}{5}$, ponieważ

$$d(2) = \frac{1}{5},\ d(0) = \frac{2}{5},\ d(-1) = \frac{1}{5}.$$

Zatem $\widetilde{b} < 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p \in (0, 1)$. W szczególności, dla $p = \frac{1}{2}$ dostajemy

$$b = \frac{3 + \sqrt{2}}{5},\ \rho_L(x) = \frac{\widetilde{L}(x, x, -x)}{5(1 - \frac{3+\sqrt{2}}{5})} = \frac{3\sqrt{\|x\|} + \delta}{2 - \sqrt{2}} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}\Big(3\sqrt{\|x\|} + \delta\Big).$$

Z Twierdzenia 3.4 z tymi samymi stałymi co powyżej dostajemy, że $\widetilde{b} = \frac{1}{2}$, oraz $\widetilde{b} < 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p \in (0, \infty)$, ponieważ $d(2) = 0$, $d(0) = \frac{1}{2}$. A oszacowanie jest następujące

$$\rho_L(x) = \frac{\widetilde{L}(x, x, 0)}{2(1 - \frac{1}{2})} = 2\|x\|^p + \delta.$$

Dla $p = \frac{1}{2}$ mamy $\widetilde{b} = \frac{1}{2}$, oraz $\rho_L(x) = 2\sqrt{\|x\|} + \delta$.

Bibliografia

[1] C. Alsina, J. Sikorska and M.S. Tomás, Norm derivatives and characterizations of inner product spaces, World Scientific Publishing, Singapore 2010.

[2] T. Aoki, On the stability of the linear transformation in Banach spaces, J. Math. Soc. Japan, 2 (1950), 64-66.

[3] R. Badora, J. Brzdęk, Fixed points of a mapping and Hyers-Ulam stability, J. Math. Anal. Appl. 413 (2014), 450-457.

[4] A.Bahyrycz, J. Brzdęk, E. Jabłońska, R. Malejki, Ulam's stability of generalization of the Fréchet functional equation, J. Math. Anal. Appl. 442 (2) (2016), 537-553.

[5] A. Bahyrycz, J. Brzdęk, M. Piszczek, J. Sikorska, Hyperstability of the Fréchet equation and a characterization of inner product spaces. J. Function Spaces Appl. 2013 (2013), art. ID 496361, 6 stron.

[6] A. Bahyrycz, J. Olko, On stability of the general linear equation. Aequationes. Math. 89 (2015), 1461-1474.

[7] A. Bahyrycz, J. Olko, Hyperstability of general linear functional equation. Aequationes. Math. 90 (2016), 527-540.

[8] J. A. Baker, The stability of certain functional equations. Proc. Amer. Math. Soc. 112 (1991), 729-732.

[9] C. Benzarouala, L. Oubbi, Ulam-stability of a generalized linear functional equation, a fixed point approach. Aequationes. Math. 94 (2020), 989-1000.

[10] N. Brillouët-Belluot, J. Brzdęk, K. Ciepliński, On some recent developments in Ulam's type stability, Abstr. Appl. Anal. 2012 (2012), art. ID 716936, 41 stron.

[11] J. Brzdęk, A note on stability of the Popoviciu functional equation on restricted domain, Demonstratio Math. 43 (2010), 635-641.

[12] J. Brzdęk, Remarks on hyperstability of the Cauchy functional equation, Aequationes Math. 86 (2013), 255–267.

[13] J. Brzdęk, Hyperstability of the Cauchy equation on restricted domains. Acta Math. Hungarica. 141 (2013), 58–67.

[14] J. Brzdęk, Remarks on stability of some inhomogeneous functional equations. Aequationes Math. 89 (2015), 83-96.

[15] J. Brzdęk, J. Chudziak, Z. Páles, A fixed point approach to stability of functional equations, Nonlinear Anal. 74 (17) (2011), 6728-6732.

[16] J. Brzdęk, K. Ciepliński, Hyperstability and superstability, Abstr. Appl. Anal. 2013 (2013), art. ID 401756, 13 stron.

[17] J. Brzdęk, K. Ciepliński, A fixed point approach to the stability of functional equations in non-Archimedean metric spaces, Nonlinear Anal. 74 (18) (2011), 6861-6867.

[18] J. Brzdęk, K. Ciepliński, Z. Leśniak, On Ulam's type stability of the linear equation and related issues, Discrete Dyn. Nat. Soc. 2014, art. ID 536791, 14 stron.

[19] J. Brzdęk, W. Fechner, M.S. Moslehian, J. Sikorska, Recent developments of the conditional stability of the homomorphism equation, Banach J. Math. Anal. 9 (3) (2015), 278-326.

[20] J. Brzdęk, Z. Leśniak, R. Malejki, On the generalized Fréchet functional equation with constant coefficients and its stability, Aequationes Math. 92 (2018), 355-373.

[21] J. Brzdęk, Z. Leśniak, R. Malejki, On the stability of a generalized Fréchet functional equation with respect to hyperplanes in the parameter space, Symmetry 13 (3) (2021), art ID 384, 21 stron.

[22] J. Brzdęk, D. Popa, I. Raşa, B. Xu, Ulam Stability of Operators, Academic Press, Oxford 2018.

[23] M. Chudziak, On solutions and stability of functional equations connected to the Popoviciu inequality. Ph.D. Thesis (in Polish), Pedagogical University of Cracow (Poland), Cracow 2012.

[24] L. Cădariu, L. Găvruţa, P. Găvruţa, Fixed points and generalized Hyers-Ulam stability, Abstr. Appl. Anal. 2012 (2012), art ID 712743, 10 stron.

[25] L. Cădariu, V. Radu, Fixed points and the stability of quadratic functional equations, Analele Universitatii de Vest din Timisoara. 41 (1) (2003), 25-48.

[26] J. d'Alembert, Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration, Histoire Acactómie Berlin (1747), 214-249.

[27] S.S. Dragomir, Some characterizations of inner product spaces and applications, Studia Univ. Babes-Bolyai Math. 34 (1) (1989), 50-55.

[28] W. Fechner, On the Hyers-Ulam stability of functional equations connected with additive and quadratic mappings, J. Math. Anal. Appl. 322 (2006), 774-786.

[29] G.-L. Forti, J. Sikorska, Variations on the Drygas equation and its stability, Nonlinear Anal. 74 (2011), 343-350.

[30] M. Fréchet, Sur la définition axiomatique d'une classe d'espaces vectoriels distanciés applicables vectoriellement sur l'espace de Hilbert, Ann. of Math. (2) 36 (3) (1935), 705-718.

[31] E. Gselmann, Hyperstability of a functional equation, Acta Math. Hungarica. 124 (2009), 179-188.

[32] D.H. Hyers, On the stability of the linear functional equation. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 27 (1941), 222-224.

[33] D.H. Hyers, G. Isac, Th.M. Rassias, Stability of Functional Equations in Several Variables, Birkhäuser, Boston 1998.

[34] P. Jordan, J. von Neumann, On inner products in linear, metric spaces, Ann. of Math. (2) 36 (3) (1935), 719-723.

[35] S.-M. Jung, On the Hyers-Ulam stability of the functional equation that have the quadratic property, J. Math. Anal. Appl. 222 (1998), 126-137.

[36] S.-M. Jung, Hyers-Ulam-Rassias Stability of Functional Equations in Nonlinear Analysis, Springer Optimization and Its Applications vol. 48, Springer, New York-Dordrecht-Heidelberg-London 2011.

[37] P. Kannappan, Functional Equations and Inequalities with Applications, Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York 2009.

[38] Y.W. Lee, On the stability on a quadratic Jensen type functional equation, J. Math. Anal. Appl. 270 (2002), 590-601.

[39] Y.W. Lee, Stability of a generalized quadratic functional equation with Jensen type, Bull. Korean Math. Soc. 42 (2005), 57-73.

[40] Y.-H. Lee, On the Hyers-Ulam-Rassias stability of the generalized polynomial function of degree 2. J. Chungcheong Math. Soc. 22 (2) (2009), 201-209.

[41] G. Maksa, Z. Páles, Hyperstability of a class of linear functional equations, Acta Math. Acad. Paedag. Nyìregyháziensis 17 (2001), 107-112.

[42] R. Malejki, Stability of a generalization of the Fréchet functional equation, Ann. Univ. Paedagog. Crac. Stud. Math. 14 (2015) 69-79.

[43] R. Malejki, On Ulam stability of a generalization of the Fréchet functional equation on a restricted domain, [In:] J. Brzdęk, D. Popa, T. Rassias (eds), Ulam Type Stability, Springer, Cham (2019), 217-229.

[44] M.S. Moslehian, J.M. Rassias, A Characterization of Inner Product Spaces Concerning an Euler-Lagrange Identity, Commun. Math. Anal. 8 (2) (2010), 16-21.

[45] K. Nikodem, Z. Páles, Characterizations of inner product spaces by strongly convex functions, Banach J. Math. Anal. 5 (1) (2011), 83-87.

[46] T. Popoviciu, Sur certaines inégalités qui caractérisentes fonctions convexes, An. Ştiinţt. Univ. Ąl. I. Cuza"Iaşi Secţ. I a Mat. (N.S.) 11 (1965), 155-164.

[47] Th.M. Rassias, On the stability of the linear mapping in Banacb spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 72 (1978), 297-300.

[48] Th.M. Rassias, New characterizations of inner product spaces, Bull Sci. Math. 108 (2) (1984), 95-99.

[49] M. Piszczek, Remark on hyperstability of the general linear equation, Aequationes Math. 88 (2014), 163-168.

[50] M. Piszczek, J. Szczawińska, Hyperstability of the Drygas functional equation, J. Funct. Spaces Appl. 2013, art ID 912718, 4 strony.

[51] M. Piszczek, J. Szczawińska, Stability of the Drygas functional equation on restricted domain, Results Math. 68 (2015), 11-24.

[52] T. Phochai, S. Saejung, Hyperstability of generalised linear functional equations in several variables, Bull. Aust. Math. Soc. 102 (2020), 293-302.

[53] J. Sikorska, On a direct method for proving the Hyers-Ulam stability of functional equations. J. Math. Anal. Appl. 372 (1) (2010), 99-109.

[54] Gy. Pólya, G. Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I, Verlag von Julius Springer, Berlin 1925.

[55] W. Smajdor, Note on a Jensen type functional equation, Publ. Math. Debrecen 63 (2003), 703-714.

[56] T. Trif, Hyers-Ulam-Rassias stability of a Jensen type functional equation, J. Math. Anal. Appl. 250 (2000), 579-588.

[57] T. Trif, On the stability of a functional equation deriving from an inequality of Popoviciu for convex functions, J. Math. Anal. Appl. 272 (2002), 604-616.

[58] D. Zhang, On hyperstability of generalised linear functional equations in several variables. Bull. Aust. Math. Soc. 92 (2015), 259-267.

[59] D. Zhang, On Hyers-Ulam stability of generalized linear functional equation and its induced Hyers-Ulam programming problem. Aequat. Math. 90 (2016), 559-568.