Prof. dr hab. Stanisław Prus
Instytut Matematyki UMCS

Lublin, 25.11.2024

Recenzja pracy doktorskiej
Dau Hong Quana
p.t. „Fixed point theorems in ordered spaces"

Recenzowana rozprawa prezentuje nowe wyniki z metrycznej teorii punktów stałych. Podstawowy nurt badań w tej teorii obejmuje problemy dotyczące warunków, jakie muszą spełniać podzbiory przestrzeni metrycznej i przekształcenia tych zbiorów, aby przekształcenia takie miały punkty stałe. Literatura zawierająca wyniki tych badań jest bardzo obszerna. Ich punktem wyjścia było klasyczne twierdzenie Banacha o punkcie stałym dla kontrakcji i wiele wyników dotyczy osłabienia warunku kontrakcyjności przekształcenia. Zastępując kontrakcyjność przez warunek Lipschitza ze stałą jeden otrzymujemy klasę przekształceń nieoddalających i cały rozległy dział metrycznej teorii punktów stałych dotyczy przekształceń nieoddalających podzbiorów przestrzeni Banacha. Inny kierunek uogólnień twierdzenia Banacha o punkcie stałym dotyczy przekształceń spełniających warunki, w których użyte są miary niezwartości. Rozwijana jest także intensywnie teoria punktów stałych dla przekształceń wielowartościowych. Nowe twierdzenia mieszczące się w tych kierunkach badań zawarte są w recenzowanej rozprawie.

Pan Hong Quan Dau napisał swoją rozprawę w Szkole Doktorskiej Uniwersytetu Pedagogicznego im. Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie, pracując pod opieką dr. hab. Andrzeja Wiśnickiego. Większość wyników w niej zwartych zostało też zamieszczonych w pięciu artykułach naukowych, z których trzy zostały napisane wspólnie z promotorem. Lektura pracy doktorskiej Pana Dau Hong Quana pokazuje, że autor bardzo dobrze opanował znaczą część rozległej wiedzy z metrycznej teorii punktów stałych. Znajduje się w niej wiele odniesień do znanych wcześniej twierdzeń, natomiast nowe wyniki dotyczą przestrzeni uporządkowanych. Ta gałąź metrycznej teorii punktów stałych jest obecnie intensywnie rozwijana, a za pionierską pracę w tym zakresie można uznać artykuł Rana i Reuringsa z 2003 roku zawierający wersję twierdzenia Banacha dla monotonicznych przekształceń podzbiorów uporządkowanych przestrzeni metrycznych.

Zawartość rozprawy. W omawianej pracy doktorskiej przedstawiono cały szereg nowych „porządkowych" wersji twierdzeń o punktach stałych. Rozdział 2 zawiera taką wersję twierdzenia Darbo o punkcie stałym dla przekształcenia T domkniętego i ograniczonego podzbioru Y uporządkowanej przestrzeni metrycznej spełniającego warunek kondensacji: $\nu(T(\Omega)) \leqslant k\nu(\Omega)$ dla każdego zbioru $\Omega \subset Y$, gdzie ν jest miarą niezwartości i $k \in (0,1)$. Jest to warunek występujący w twierdzeniu Darbo, ale w odróżnieniu od pierwowzoru, w twierdzeniu z rozprawy nie ma założenia ciągłości przekształcenia T. Zakłada się, że T jest monotoniczne i istnieje $y \in Y$ taki, że $y \preceq T(y)$. W dowodzie tego i szeregu dalszych twierdzeń korzysta się z własności skończonych przecięć odpowiednio dobranej rodziny zbiorów, a w końcowym kroku stosuje się lemat Kuratowskiego-Zorna.

W dalszej części autor podaje odpowiednik twierdzenia Sadowskiego, a więc twierdzenie, w którym warunek kondensacji jest zastąpiony przez nierówność $\nu(T(\Omega)) < \nu(\Omega)$ dla $\Omega \subset Y$ takich, że $\nu(\Omega) > 0$, przy czym wynik ten jest jedynie wnioskiem z bardziej ogólnego twierdzenia o wspólnym punkcie stałym dla skończonej, komutującej rodziny przekształceń $\{T_1, \ldots, T_n\}$. Również w tym przypadku nie zakłada się ciągłości przekształceń, a jedynie ich monotoniczność i istnienie punktu $y \in Y$ takiego, że $y \preceq T_i(y)$ dla $i = 1, \ldots, n$. Kolejne wyniki z rozdziału 2 to odpowiednik twierdzenia Sadowskiego dla monotonicznych przekształceń wielowartościowych i twierdzenie o wspólnym punkcie stałym dla komutującej pary monotonicznych przekształceń, z których jedno jest wielowartościowe a drugie jednowartosciowe.

Warto podkreślić, że autor podaje wiele przykładów ilustrujących omawiane pojęcia, a na zakończenie rozdziału 2 przedstawia szereg zastosowań uzyskanych wyników do równań i inkluzji całkowych.

W rozdziale 3 zawarte są twierdzenia o punkcie stałym dla przestrzeni z zadanym grafem skierowanym G. Używając ścieżek w grafie autor definiuje G-przedziały i wykazuje twierdzenie o istnieniu niepustego G-przedziału postaci $[s, s]_G$ niezmienniczego dla przekształcenia T wierzchołków grafu G. Analogicznie jak w twierdzeniach z rozdziału 2, o przekształceniu T zakłada sie, że jest monotoniczne, tym razem względem grafu i istnieje wierzchołek y taki, że $T(y) \in [y, \rightarrow)_G$. Również w tym dowodzie konstruowana jest pewna rodzina zbiorów mająca własność skończonych przecięć. W rozdziale 2 użycie miar niezwartości pozwalało na skonstruowanie zbiorów zwartych, natomiast w omawianym twierdzeniu własność skończonych przecięć dla rodzin G-przedziałów występuje jako założenie.

Bazując na tym twierdzeniu i znanych wcześniej twierdzeniach o punkcie stałym dla nieoddalających, a także asymptotycznie nieoddalających przekształceń podzbiorów przestrzeni Banacha, autor otrzymuje nowe wyniki gwarantujące istnienie punktu stałego dla przekształceń podzbiorów przestrzeni Banacha z zadanym grafem skierowanym G. Twierdzenie o punkcie stałym dla przekształceń G-nieoddalających jest następnie zastosowane do równań całkowych.

W rozdziale 4 rozważane są przestrzenie metryczne o jednoznacznie wyznaczonych liniach geodezyjnych. Autor wykazał między innymi, że jeśli taka przestrzeń jest zupełna i jednostajnie wypukła, to rodziny domkniętych, wypukłych i ograniczonych zbiorów w tej przestrzeni mają własność skończonych przecięć. Korzystając z tego faktu i twierdzenia z rozdziału 3 o przedziale niezmienniczym, autor otrzymuje dalsze twierdzenia o punkcie stałym dla przekształceń monotonicznych podzbiorów przestrzeni z zadanym porządkiem, a także zadanym grafem skierowanym. Dla zupełnej, hiperbolicznej, jednostajnie wypukłej przestrzeni metrycznej autor wykazuje twierdzenie o punkcie stałym dla przekształceń wielowartościowych.

Rozdział 5 zawiera wyniki dotyczące przestrzeni modularnych. Najważniejsze z nich to trzy twierdzenia o punkcie stałym dla przekształceń wielowartościowych. W jednym z nich w przestrzeni zadany jest porządek, a w dwóch pozostałych zadany jest graf skierowany i o przekształceniach zakłada się, że są monotoniczne względem porządku lub kierunku w grafie, spełniają „porządkowy" warunek nieoddalania ze względu na modular, a także warunek będący odpowiednikiem występującego we wcześniejszych twierdzeniach założenia o istnieniu elementu y poprzedzającego $T(y)$.

Uwagi szczegółowe. Praca doktorska Pana Dau Hong Quana napisana jest bardzo starannie. Podane są w niej wszystkie niezbędne definicje, przy czym wiele z nich opatrzonych jest uwagami i zilustrowanych przykładami. Dowody twierdzeń są kompletne i jasno przedstawione.

Moja jedyna uwaga krytyczna dotyczy definicji miary niezwartości na stronie 9. Autor podał okrojoną definicję, w której jądro miary nie musi być równe rodzinie wszystkich zbiorów warunkowo zwartych. Kluczowy w kilku dowodach warunek będący odpowiednikiem lematu Cantora został przedstawiony jako wniosek z warunków występujących w tej definicji, co jednak w ogólności nie jest prawdą. Jest tak przy założeniu, że miara jest regularna. Założenie to pojawia się we wszystkich twierdzeniach z rozdziału 2 z wyjątkiem twierdzenia 2.2.6.

Ocena rozprawy. Recenzowana rozprawa zawiera szereg nowych wyników, które stanowią istotny wkład do intensywnie ostatnio rozwijanej gałęzi metrycznej teorii punktów stałych. Szereg z nich ma swoje wcześniej znane pierwowzory, ale dowody podanych w rozprawie „porządkowych" wersji wymagały od autora nie tylko rozległej wiedzy, ale także znacznej pomysłowości. Warte podkreślenia są także podane przez autora zastosowania otrzymanych twierdzeń o punkcie stałym do równań i inkluzji całkowych.

Reasumując, uważam, że praca doktorska Pana Dau Hong Quana spełnia bardzo dobrze wszystkie warunki stawiane rozprawom doktorskim, w szczególności warunki określone w ustawie *Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce* z 20 lipca 2018 r. W pełni uzasadnia to nadanie mu stopnia doktora w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych, w dyscyplinie matematyka. Wnoszę zatem o dopuszczenie Pana Dau Hong Quana do dalszych etapów postępowania doktorskiego.

S Prus